Operációkutatás I, 10. gyakorlat 2010. november 29.

1. Tekintsük a
$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 12 \\ x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 \\ -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -8 \\ -2x_1 & + & x_2 & \leq & -6 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$
egyenlőtlenség-rendszerrel leírt poliédert. Határozzuk meg a karakterisztikus alterét és kúpját, továbbá adjunk meg olyan c vektort (ha létezik), hogy cx ne legyen felülről korlátos a poliéderen.

2. Egy egyelőtlenség-rendszer megoldása *bázismegoldás*, ha az egyenlőséggel teljesülő sorok által alkotott részmátrix rangja megegyezik az egyelőtlenség-rendszer mátrixának rangjával. Igazoljuk, hogy az $Ax = b, x \geq 0$ rendszer egy megoldása akkor és csak akkor bázismegoldás, ha a pozitív elemekhez tartozó A-beli oszlopok lineárisan függetlenek.

3. Legyen $A_1 \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{j\times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^k$, $b_2 \in \mathbb{R}^l$, $b_3 \in \mathbb{R}^j$, $b_4 \in \mathbb{R}^n$! Írjuk fel a Farkas-lemmát az alábbi rendszerre!
$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n : A_1x_1 \leq b_1, A_2x_2 \leq b_2, A_3x_3 \geq b_3, x_1 + x_2 + x_3 = b_4, x_1 \geq 0.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy két diszjunkt poliéder erősen szétválasztható, azaz létezik két párhuzamos elválasztó hipersík: létezik c vektor és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hogy $\sup_{x\in P_1} cx < \alpha < \beta < \inf_{x\in P_2} cx$.

5. Bizonyítsd be Gordan tételét: akkor és csak akkor létezik x amire $Ax \ll 0$ (azaz Ax minden koordinátája pozitív), ha nem létezik $y \neq 0$, amire $yA = 0$ és $y \geq 0$.

6. **Beadandó.** Adjunk (α-ra és β-ra vonatkozó) szükséges és elégséges feltételt arra, hogy a
$$\max(x_1 + x_2)$$
$$\alpha x_1 + \beta x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
lineáris programnak
   (a) legyen optimális megoldása;
   (b) egyetlen optimális megoldása legyen;
   (c) legyen megengedett, de ne legyen optimális megoldása.

Operációkutatás I, 10. gyakorlat 2010. november 29.

1. Tekintsük a
$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 12 \\ x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 \\ -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -8 \\ -2x_1 & + & x_2 & \leq & -6 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$
egyenlőtlenség-rendszerrel leírt poliédert. Határozzuk meg a karakterisztikus alterét és kúpját, továbbá adjunk meg olyan c vektort (ha létezik), hogy cx ne legyen felülről korlátos a poliéderen.

2. Egy egyelőtlenség-rendszer megoldása *bázismegoldás*, ha az egyenlőséggel teljesülő sorok által alkotott részmátrix rangja megegyezik az egyelőtlenség-rendszer mátrixának rangjával. Igazoljuk, hogy az $Ax = b, x \geq 0$ rendszer egy megoldása akkor és csak akkor bázismegoldás, ha a pozitív elemekhez tartozó A-beli oszlopok lineárisan függetlenek.

3. Legyen $A_1 \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{j\times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^k$, $b_2 \in \mathbb{R}^l$, $b_3 \in \mathbb{R}^j$, $b_4 \in \mathbb{R}^n$! Írjuk fel a Farkas-lemmát az alábbi rendszerre!
$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n : A_1x_1 \leq b_1, A_2x_2 \leq b_2, A_3x_3 \geq b_3, x_1 + x_2 + x_3 = b_4, x_1 \geq 0.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy két diszjunkt poliéder erősen szétválasztható, azaz létezik két párhuzamos elválasztó hipersík: létezik c vektor és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hogy $\sup_{x\in P_1} cx < \alpha < \beta < \inf_{x\in P_2} cx$.

5. Bizonyítsd be Gordan tételét: akkor és csak akkor létezik x amire $Ax \ll 0$ (azaz Ax minden koordinátája pozitív), ha nem létezik $y \neq 0$, amire $yA = 0$ és $y \geq 0$.

6. **Beadandó.** Adjunk (α-ra és β-ra vonatkozó) szükséges és elégséges feltételt arra, hogy a
$$\max(x_1 + x_2)$$
$$\alpha x_1 + \beta x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
lineáris programnak
   (a) legyen optimális megoldása;
   (b) egyetlen optimális megoldása legyen;
   (c) legyen megengedett, de ne legyen optimális megoldása.