Operációkutatás I, 4. gyakorlat 2010. október 4.

1. Adott n darab tárgy és k darab (tetszőleges nagy mélységű) verem. A tárgyak egy sorrendjéből kaphatunk egy másikat úgy, hogy az adott sorrendben beletesszük őket a vermekbe (mi dönthetjük el hogy melyikbe), ezt követően valamilyen sorrendben kivesszük a tárgyakat a vermekből. A tárgyak mely permutációit kaphatjuk meg a leírt módon? Tipp: ez kapcsolódik a részbenrendezésekről tanult tételhez.

2. Van egy 32 lapos magyarkártya-csomagunk. Keverés után a lapokat 8 db egyenlő kupacra osztjuk (minden kupacban tehát 4 lap van). Mikor lehet kiválasztani minden kupacból egy-egy lapot, hogy a kapott 8 lap között legyen mindenféle értékű (7, 8, 9, 10, alsó, felső, király, ász)?

3. Egy $n \times n$-es táblázatot *latin négyzet*nek nevezünk, ha úgy írtuk be a mezőkbe 1-től n-ig a számokat, hogy minden sorban és minden oszlopban mindegyik szám pontosan egyszer fordul elő. $m < n$ esetén egy $n \times m$-es táblázatot *latin téglalap*nak nevezünk, ha minden sorban és minden oszlopban mindegyik szám legfeljebb egyszer szerepel (természetesen itt is 1 és n közötti egész számok vannak a mezőkbe írva). Bizonyítsd be, hogy minden latin téglalap kiegészíthető latin négyzetté!

4. Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf. Készítsük el hozzá a következő páros gráfot: a ponthalmaza a V két diszjunkt példányát tartalmazza (V' és V'') és $u' \in V'$ és $v'' \in V''$ között akkor megy él, ha $uv \in A$. Bizonyítsd be, hogy V pontosan akkor fedhető le pontdiszjunkt D-beli irányított körökkel, ha a kapott páros gráfban van teljes párosítás.

5. **Beadandó.** Bizonyítsd be, hogy ha egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban létezik az $X \subseteq A \cup B$ ponthalmazt fedő párosítás, akkor a maximális elemszámú párosítások között is van olyan, amelyik fedi X-et.

Operációkutatás I, 4. gyakorlat 2010. október 4.

1. Adott n darab tárgy és k darab (tetszőleges nagy mélységű) verem. A tárgyak egy sorrendjéből kaphatunk egy másikat úgy, hogy az adott sorrendben beletesszük őket a vermekbe (mi dönthetjük el hogy melyikbe), ezt követően valamilyen sorrendben kivesszük a tárgyakat a vermekből. A tárgyak mely permutációit kaphatjuk meg a leírt módon? Tipp: ez kapcsolódik a részbenrendezésekről tanult tételhez.

2. Van egy 32 lapos magyarkártya-csomagunk. Keverés után a lapokat 8 db egyenlő kupacra osztjuk (minden kupacban tehát 4 lap van). Mikor lehet kiválasztani minden kupacból egy-egy lapot, hogy a kapott 8 lap között legyen mindenféle értékű (7, 8, 9, 10, alsó, felső, király, ász)?

3. Egy $n \times n$-es táblázatot *latin négyzet*nek nevezünk, ha úgy írtuk be a mezőkbe 1-től n-ig a számokat, hogy minden sorban és minden oszlopban mindegyik szám pontosan egyszer fordul elő. $m < n$ esetén egy $n \times m$-es táblázatot *latin téglalap*nak nevezünk, ha minden sorban és minden oszlopban mindegyik szám legfeljebb egyszer szerepel (természetesen itt is 1 és n közötti egész számok vannak a mezőkbe írva). Bizonyítsd be, hogy minden latin téglalap kiegészíthető latin négyzetté!

4. Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf. Készítsük el hozzá a következő páros gráfot: a ponthalmaza a V két diszjunkt példányát tartalmazza (V' és V'') és $u' \in V'$ és $v'' \in V''$ között akkor megy él, ha $uv \in A$. Bizonyítsd be, hogy V pontosan akkor fedhető le pontdiszjunkt D-beli irányított körökkel, ha a kapott páros gráfban van teljes párosítás.

5. **Beadandó.** Bizonyítsd be, hogy ha egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban létezik az $X \subseteq A \cup B$ ponthalmazt fedő párosítás, akkor a maximális elemszámú párosítások között is van olyan, amelyik fedi X-et.