Operációkutatás I, 5. gyakorlat 2010. október 11.

1. Legyen H a G véges csoport részcsoportja, $k := |G : H|$. Mutasd meg, hogy ekkor létezik $x_1, \ldots, x_k \in G$, amely egyszerre jobboldali és baloldali reprezentánsrendszere H-nak, azaz $Hx_1, \ldots, Hx_k$ az összes jobboldali, $x_1H, \ldots, x_kH$ pedig az összes baloldali H szerinti mellékosztály.

2. Legyen $G = (A, B; E)$ olyan páros gráf, amiben létezik teljes párosítás. Mutassunk példát, amikor a maximális súlyú teljes párosítás súlya kisebb, mint a maximális súlyú párosítás súlya.

3. Igaz-e a következő állítás: ha egy páros gráfban nincs teljes párosítás, akkor a súlyozott lefogások súlyának nem létezik minimuma semmilyen élsúlyozásra sem?

4. Mutassunk példát olyan $G = (A, B; E)$ páros gráfra nemnegatív élsúlyokkal, ahol $|A| = |B|$ és minden minimális π súlyozott lefogásban van olyan v pont, amire $\pi(v) < 0$. Van-e olyan példa ahol G teljes páros gráf?

5. Adott egy $G = (A, B; E)$ páros gráf, $c : E \to \mathbb{R}$ élsúlyok, és egy minimális súlyozott lefogás: $\pi : V \to \mathbb{R}$. Lássuk be, hogy egy M teljes párosítás pontosan akkor maximális súlyú, ha minden $uv \in M$ élre $\pi(u) + \pi(v) = c(uv)$.

6. **Beadandó.** Legyen $G = (A, B; E)$ olyan páros gráf, amiben létezik teljes párosítás, és legyen M egy teljes párosítás. Irányítsuk M éleit B felé, a többi élt pedig A felé; legyen az így kapott irányított gráf D. Bizonyítsd be, hogy egy $c : E \to \mathbb{R}$ súlyozásra nézve M pontosan akkor maximális súlyú teljes párosítás, ha M éleire c-t, a többi élre pedig $-c$-t írva konzervatív súlyozást kapunk D-ben.

Operációkutatás I, 5. gyakorlat 2010. október 11.

1. Legyen H a G véges csoport részcsoportja, $k := |G : H|$. Mutasd meg, hogy ekkor létezik $x_1, \ldots, x_k \in G$, amely egyszerre jobboldali és baloldali reprezentánsrendszere H-nak, azaz $Hx_1, \ldots, Hx_k$ az összes jobboldali, $x_1H, \ldots, x_kH$ pedig az összes baloldali H szerinti mellékosztály.

2. Legyen $G = (A, B; E)$ olyan páros gráf, amiben létezik teljes párosítás. Mutassunk példát, amikor a maximális súlyú teljes párosítás súlya kisebb, mint a maximális súlyú párosítás súlya.

3. Igaz-e a következő állítás: ha egy páros gráfban nincs teljes párosítás, akkor a súlyozott lefogások súlyának nem létezik minimuma semmilyen élsúlyozásra sem?

4. Mutassunk példát olyan $G = (A, B; E)$ páros gráfra nemnegatív élsúlyokkal, ahol $|A| = |B|$ és minden minimális π súlyozott lefogásban van olyan v pont, amire $\pi(v) < 0$. Van-e olyan példa ahol G teljes páros gráf?

5. Adott egy $G = (A, B; E)$ páros gráf, $c : E \to \mathbb{R}$ élsúlyok, és egy minimális súlyozott lefogás: $\pi : V \to \mathbb{R}$. Lássuk be, hogy egy M teljes párosítás pontosan akkor maximális súlyú, ha minden $uv \in M$ élre $\pi(u) + \pi(v) = c(uv)$.

6. **Beadandó.** Legyen $G = (A, B; E)$ olyan páros gráf, amiben létezik teljes párosítás, és legyen M egy teljes párosítás. Irányítsuk M éleit B felé, a többi élt pedig A felé; legyen az így kapott irányított gráf D. Bizonyítsd be, hogy egy $c : E \to \mathbb{R}$ súlyozásra nézve M pontosan akkor maximális súlyú teljes párosítás, ha M éleire c-t, a többi élre pedig $-c$-t írva konzervatív súlyozást kapunk D-ben.