Operációkutatás I, 9. gyakorlat 2010. november 22.

1. Egy $n \times n$-es nem-szinguláris négyzetes mátrix első m sora által alkotott részmátrixot jelölje A_1, míg a maradékot A_2. Tegyük fel, hogy A_1 minden sora ortogonális A_2 minden sorára. Mutasd meg, hogy ekkor A_1 sortere éppen A_2 nulltere.

2. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges Z korlátos és zárt halmazra

$$f : c \longmapsto \max_{x \in Z} cx$$

konvex függvény.

3. Igazoljuk, hogy ha a $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, zárt halmaz tartalmaz valamely pontjából kiinduló, c irányú félegyenest, akkor bármelyik pontjából kiindulót is tartalmazza.

4. Hány zárt félsík metszeteként állítható elő egy zárt körlap?

5. Hány nyílt félsík metszeteként állítható elő egy nyílt körlap?

6. Konstruáljunk olyan n-dimenziós poliédert, amelynek $O(n)$ hiperlapja és legalább 2^n csúcsa van.

7. **Beadandó.** Legyen $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ nemüres. Mutasd meg, hogy ekkor $P = \mathbb{R}^n$ akkor és csak akkor, ha $r(A) = 0$ (azaz A minden eleme 0) és $b \geq 0$.

1. Egy $n \times n$-es nem-szinguláris négyzetes mátrix első m sora által alkotott részmátrixot jelölje A_1, míg a maradékot A_2. Tegyük fel, hogy A_1 minden sora ortogonális A_2 minden sorára. Mutasd meg, hogy ekkor A_1 sortere éppen A_2 nulltere.

2. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges Z korlátos és zárt halmazra

$$f : c \longmapsto \max_{x \in Z} cx$$

konvex függvény.

3. Igazoljuk, hogy ha a $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, zárt halmaz tartalmaz valamely pontjából kiinduló, c irányú félegyenest, akkor bármelyik pontjából kiindulót is tartalmazza.

4. Hány zárt félsík metszeteként állítható elő egy zárt körlap?

5. Hány nyílt félsík metszeteként állítható elő egy nyílt körlap?

6. Konstruáljunk olyan n-dimenziós poliédert, amelynek $O(n)$ hiperlapja és legalább 2^n csúcsa van.

7. **Beadandó.** Legyen $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ nemüres. Mutasd meg, hogy ekkor $P = \mathbb{R}^n$ akkor és csak akkor, ha $r(A) = 0$ (azaz A minden eleme 0) és $b \geq 0$.