Operációkutatás I, pótfeladatok 2010. december 27.

Akinek nincs elég beadandó feladata, annak ezek közül kell kellő számút beadni. Akinek azt írtam, hogy feladatok beadásával javíthat, annak legalább három jó megoldást kell beküldenie. **Beküldési határidő: január 6.**

1. Mutasd meg, hogy egy digráf élein értelmezett költségfüggvény pontosan akkor potenciál-különbség (más szóval *tenzió*), ha minden irányítatlan kör költsége az irányításnak megfelelően előjelesen összeadva 0.
2. Legyen $C = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0\}$. Állítsuk elő C-t metszetkúpként és generált kúpként!
3. Az $Ax \leq b$ rendszer sorainak egy részhalmaza *élesíthető*, ha ezeken szigorú egyenlőtlenséget megkövetelve is van megoldás. Igazoljuk, hogy élesíthető sorhalmazok uniója is élesíthető.
4. Legyen $G = (V, E)$ gráf. Egy $v \in V$ csúcs esetén $N(v)$-vel jelöljük v szomszédainak halmazát. Bizonyítsuk be, hogy
$$\exists x : V \to \mathbb{R}_+, \text{ amelyre } \sum_{u \in N(v)} x(u) = 1 \text{ minden } v \in V \text{ esetén}$$
akkor és csak akkor, ha
$$\nexists y : V \to \mathbb{R}, \text{ amelyre } \sum_{u \in N(v)} y(u) \geq 0 \text{ minden } v \in V \text{ esetén és} \sum_{v \in V} y(v) < 0.$$
5. Legyen C egy ferdén szimmetrikus mátrix, azaz $C^T = -C$. Bizonyítsuk be, hogy
   (a) vagy létezik $x \geq 0$, hogy $Cx \geq 0$ és x első komponense pozitív, vagy létezik $x \geq 0$, hogy $Cx \geq 0$ és Cx első komponense pozitív;
   (b) $\exists x \geq 0 : Cx \geq 0,\ Cx + x \gg 0$ (azaz $Cx + x$ minden komponense pozitív).
6. Legyen A egy $D = (V, E)$ irányított gráf pont-él incidencia mátrixa, $f \ll g$ alsó ill. felső korlátok az éleken. Bizonyítsuk be, hogy x^* bázismegoldása a megengedett áram feladatnak (azaz $\{Ax = 0, f \leq x \leq g\}$-nek) akkor és csak akkor, ha megoldás, és azok az élek, amelyeken x^* nem egyenlő egyik korláttal sem, erdőt alkotnak G-ben.