Operációkutatás II, 1. gyakorlat 2011. február 16.

1. Mutassuk meg, hogy ha A TU mátrix, akkor $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ is TU!

2. Milyen A TU mátrix esetén lesz $\begin{pmatrix} A & A \\ A & -A \end{pmatrix}$ TU?

3. Legyenek A és B TU-mátrixok. Igaz-e, hogy ekkor (A, I), $(A, -A)$, (A, B) is TU?

4. Legyen A egy TU mátrix, b egész (oszlop)vektor, a egész (sor)vektor, és α egész szám. Tegyük fel, hogy az $Ax \leq b$ egyenlőtlenségrendszernek van megoldása és neki (lineáris) következménye az $ax \leq \alpha$ egyenlőtlenség. Lássuk be, hogy egész együtthatókkal is lineáris következménye (azaz, hogy van $y \geq 0$ egész vektor melyre $yA = a$ és $yb \leq \alpha$).

5. Mennyi egy összefüggő páros gráf incidencia-mátrixának rangja?

6. Legyen A egy páros gráf incidenciamátrixa, $P = \{Ax = \mathbf{1}, x \geq 0\}$ poliéder. Bizonyítsuk be, hogy
   (a) $P = \text{conv}\{\text{a teljes párosítások karakterisztikus vektorai}\}$;
   (b) $K_{n,n}$ teljes páros gráf esetén $\dim P = (n-1)^2$.

7. Bizonyítsuk be, hogy izolált pontot nem tartalmazó páros gráfban a lefogó élek minimális száma egyenlő a független pontok maximális számával.

8. **Beadható.** Legyen $G = (V_1 \cup V_2, E)$ páros gráf. Lássuk be, hogy pontosan akkor létezik olyan $F \subseteq E$ élhalmaz, aminek V_1-ben minden foka 10 és V_2-ben minden foka 20, ha

$$\begin{cases} \text{nem létezik olyan } X \subseteq V_1,\ Y \subseteq V_2 \text{ amelyre } 20|Y| > 10|X| + d(Y, V_1 - X) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{és} \\ \text{nem létezik olyan } X \subseteq V_1,\ Y \subseteq V_2 \text{ amelyre } 10|X| > 20|Y| + d(X, V_2 - Y). \end{cases}$$

9. Egy hipergráf TU, ha incidencia-mátrixa TU. Bizonyítsuk be, hogy TU hipergráf független éleinek maximális száma megegyezik az éleket lefogó pontok minimális számával.

Operációkutatás II, 1. gyakorlat 2011. február 16.

1. Mutassuk meg, hogy ha A TU mátrix, akkor $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ is TU!

2. Milyen A TU mátrix esetén lesz $\begin{pmatrix} A & A \\ A & -A \end{pmatrix}$ TU?

3. Legyenek A és B TU-mátrixok. Igaz-e, hogy ekkor (A, I), $(A, -A)$, (A, B) is TU?

4. Legyen A egy TU mátrix, b egész (oszlop)vektor, a egész (sor)vektor, és α egész szám. Tegyük fel, hogy az $Ax \leq b$ egyenlőtlenségrendszernek van megoldása és neki (lineáris) következménye az $ax \leq \alpha$ egyenlőtlenség. Lássuk be, hogy egész együtthatókkal is lineáris következménye (azaz, hogy van $y \geq 0$ egész vektor melyre $yA = a$ és $yb \leq \alpha$).

5. Mennyi egy összefüggő páros gráf incidencia-mátrixának rangja?

6. Legyen A egy páros gráf incidenciamátrixa, $P = \{Ax = \mathbf{1}, x \geq 0\}$ poliéder. Bizonyítsuk be, hogy

   (a) $P = \text{conv}\{\text{a teljes párosítások karakterisztikus vektorai}\}$;

   (b) $K_{n,n}$ teljes páros gráf esetén $\dim P = (n-1)^2$.

7. Bizonyítsuk be, hogy izolált pontot nem tartalmazó páros gráfban a lefogó élek minimális száma egyenlő a független pontok maximális számával.

8. **Beadható.** Legyen $G = (V_1 \cup V_2, E)$ páros gráf. Lássuk be, hogy pontosan akkor létezik olyan $F \subseteq E$ élhalmaz, aminek V_1-ben minden foka 10 és V_2-ben minden foka 20, ha

$$\begin{cases} \text{nem létezik olyan } X \subseteq V_1,\ Y \subseteq V_2 \text{ amelyre } 20|Y| > 10|X| + d(Y, V_1 - X) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\text{és} \\ \text{nem létezik olyan } X \subseteq V_1,\ Y \subseteq V_2 \text{ amelyre } 10|X| > 20|Y| + d(X, V_2 - Y). \end{cases}$$

9. Egy hipergráf TU, ha incidencia-mátrixa TU. Bizonyítsuk be, hogy TU hipergráf független éleinek maximális száma megegyezik az éleket lefogó pontok minimális számával.