Operációkutatás II, 10. gyakorlat 2011. május 4.

1. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$-ben tetszőleges norma konvex.
2. Mutassuk meg, hogy a szimmetrikus valós $n \times n$-es mátrixok $n(n+1)/2$ dimenziós terében az $f(X) = \lambda_{max}(X)$ függvény konvex.
3. Adott $0 < k < n$ egészekre és $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra legyen $f_k(x)$ az x vektor k legnagyobb koordinátájának az összege. Mutassunk meg, hogy f_k konvex függvény.
4. Mutassuk meg, hogy ha $f_1, \ldots, f_k$ konvex függvények a $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazon, g konvex függvény $\mathbb{R}^k$-n, és $x \leq y$ esetén $g(x) \leq g(y)$, akkor a C-n definiált $x \mapsto g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))$ függvény is konvex.
5. Mutassuk meg, hogy minden $u_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\sum \lambda_i = 1$ esetén $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \leq \ln(\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{u_i})$.
6. Bizonyítsuk be Hölder egyenlőtlenségét: ha $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, és $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, akkor
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.$$
Tipp: használjuk, hogy $-\log x$ konvex.
7. Legyen $D = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x_{n+1} > 0\}$, és definiáljunk egy $f : D \to \mathbb{R}^n$ függvényt: $z \in \mathbb{R}^n$ és $t > 0$-ra $f(z,t) = \frac{z}{t}$. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $C \subseteq D$ konvex halmazra $f(C)$ is konvex, és tetszőleges $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazra $f^{-1}(C)$ is konvex.

Operációkutatás II, 10. gyakorlat 2011. május 4.

1. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$-ben tetszőleges norma konvex.

2. Mutassuk meg, hogy a szimmetrikus valós $n \times n$-es mátrixok $n(n+1)/2$ dimenziós terében az $f(X) = \lambda_{max}(X)$ függvény konvex.

3. Adott $0 < k < n$ egészekre és $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra legyen $f_k(x)$ az x vektor k legnagyobb koordinátájának az összege. Mutassunk meg, hogy f_k konvex függvény.

4. Mutassuk meg, hogy ha $f_1, \ldots, f_k$ konvex függvények a $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazon, g konvex függvény $\mathbb{R}^k$-n, és $x \leq y$ esetén $g(x) \leq g(y)$, akkor a C-n definiált $x \mapsto g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))$ függvény is konvex.

5. Mutassuk meg, hogy minden $u_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\sum \lambda_i = 1$ esetén $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \leq \ln(\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{u_i})$.

6. Bizonyítsuk be Hölder egyenlőtlenségét: ha $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, és $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, akkor
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.$$
Tipp: használjuk, hogy $-\log x$ konvex.

7. Legyen $D = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x_{n+1} > 0\}$, és definiáljunk egy $f : D \to \mathbb{R}^n$ függvényt: $z \in \mathbb{R}^n$ és $t > 0$-ra $f(z,t) = \frac{z}{t}$. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $C \subseteq D$ konvex halmazra $f(C)$ is konvex, és tetszőleges $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazra $f^{-1}(C)$ is konvex.