Operációkutatás II, 2. gyakorlat 2011. február 23.

Definíció. Adott egy $D = (V, E)$ gyengén összefüggő irányított gráf, és egy $F \subseteq E$ feszítő fa. Definiáljuk az $A \in \mathbb{Z}^{F\times(E-F)}$ mátrixot a következőképpen. Minden $uv \in E - F$-re F-ben egyértelmű út vezet v-ből u-ba. Az uv-hez tartozó oszlopban az út éleihez 1-et ill. -1-et írunk aszerint hogy előre- vagy hátra-élek, a többi élhez pedig 0-t. Az így előálló mátrixokat **hálózati mátrix**nak nevezzük.
Tétel. *Minden hálózati mátrix teljesen unimoduláris.*

1. Mutassuk meg, hogy ha A hálózati mátrix, akkor (A, A), (A, I) $\binom{A}{A}$, $\binom{A}{I}$ is hálózati mátrix.

2. Egy halmazrendszer **lamináris**, ha bármely két eleme vagy diszjunkt vagy egyik tartalmazza a másikat. Legyen $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ két lamináris halmazrendszer ugyanazon az S alaphalmazon. Legyen A az a mátrix, aminek sorai az $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$-beli halmazok karakterisztikus vektorai. Mutassuk meg, hogy A hálózati mátrix.

3. Adottak $0 \le a_i < b_i \le 1$ valós számok ($i = 1, \dots, m$), és adott egy k pozitív egész. Mutassuk meg, hogy az $[a_i, b_i]$ intervallumok beoszthatók k csoportra úgy, hogy tetszőleges $x \in [0, 1]$-re az x-et tartalmazó intervallumok száma a különböző csoportokban majdnem ugyanannyi (legfeljebb 1-gyel térhet el).

4. **Beadható.** Mutassunk olyan P egész poliédert, k pozitív egész számot, és $z \in kP$ egész vektort, ahol z nem áll elő k darab P-beli egész vektor összegeként.

5. Adott egy $D = (V, E)$ irányított gráf, egy $b : V \to \mathbb{Z}$ igényfüggvény, egy $u : E \to \mathbb{Z}_+$ kapacitásfüggvény, és egy $c : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. Tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} &\max cx \\ 0 \le x_e &\le u_e && \text{minden } e \in E\text{-re,} \\ \varrho_x(v) - \delta_x(v) &= b_v && \text{minden } v \in V\text{-re.} \end{aligned}$$

   Mutassuk meg, hogy ez visszavezethető az órán látott kapacitás nélküli feladatra!

6. Az órán szerepelt, hogy egy $m \times n$-es valós mátrix elemei kerekíthetők úgy, hogy minden sorösszeg és oszlopösszeg kevesebb mint 1-gyel változzon. Lássuk be, hogy ez még úgy is megtehető, hogy tetszőleges $1 \le i \le m$-re az első i sor elemeinek összege is kevesebb mint 1-gyel változik, és tetszőleges $1 \le j \le n$-re az első j oszlop elemeinek összege is kevesebb mint 1-gyel változik.

7. **Beadandó.** Mutassuk meg, hogy ha egy páros gráf incidenciamátrixához hozzáadunk egy csupa 1 sort, akkor hálózati mátrixot kapunk, de ha egy csupa 1 oszlopot adunk hozzá, akkor nem feltétlenül.

Operációkutatás II, 2. gyakorlat 2011. február 23.

Definíció. Adott egy $D = (V, E)$ gyengén összefüggő irányított gráf, és egy $F \subseteq E$ feszítő fa. Definiáljuk az $A \in \mathbb{Z}^{F \times (E-F)}$ mátrixot a következőképpen. Minden $uv \in E - F$-re F-ben egyértelmű út vezet v-ből u-ba. Az uv-hez tartozó oszlopban az út éleihez 1-et ill. -1-et írunk aszerint hogy előre- vagy hátra-élek, a többi élhez pedig 0-t. Az így előálló mátrixokat **hálózati mátrix**nak nevezzük.
Tétel. *Minden hálózati mátrix teljesen unimoduláris.*

1. Mutassuk meg, hogy ha A hálózati mátrix, akkor (A, A), (A, I) $\binom{A}{A}$, $\binom{A}{I}$ is hálózati mátrix.

2. Egy halmazrendszer **lamináris**, ha bármely két eleme vagy diszjunkt vagy egyik tartalmazza a másikat. Legyen $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ két lamináris halmazrendszer ugyanazon az S alaphalmazon. Legyen A az a mátrix, aminek sorai az $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$-beli halmazok karakterisztikus vektorai. Mutassuk meg, hogy A hálózati mátrix.

3. Adottak $0 \le a_i < b_i \le 1$ valós számok ($i = 1, \ldots, m$), és adott egy k pozitív egész. Mutassuk meg, hogy az $[a_i, b_i]$ intervallumok beoszthatók k csoportra úgy, hogy tetszőleges $x \in [0, 1]$-re az x-et tartalmazó intervallumok száma a különböző csoportokban majdnem ugyanannyi (legfeljebb 1-gyel térhet el).

4. **Beadható.** Mutassunk olyan P egész poliédert, k pozitív egész számot, és $z \in kP$ egész vektort, ahol z nem áll elő k darab P-beli egész vektor összegeként.

5. Adott egy $D = (V, E)$ irányított gráf, egy $b : V \to \mathbb{Z}$ igényfüggvény, egy $u : E \to \mathbb{Z}_+$ kapacitásfüggvény, és egy $c : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. Tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} &\max cx \\ 0 \le x_e &\le u_e && \text{minden } e \in E\text{-re,} \\ \varrho_x(v) - \delta_x(v) &= b_v && \text{minden } v \in V\text{-re.} \end{aligned}$$

   Mutassuk meg, hogy ez visszavezethető az órán látott kapacitás nélküli feladatra!

6. Az órán szerepelt, hogy egy $m \times n$-es valós mátrix elemei kerekíthetők úgy, hogy minden sorösszeg és oszlopösszeg kevesebb mint 1-gyel változzon. Lássuk be, hogy ez még úgy is megtehető, hogy tetszőleges $1 \le i \le m$-re az első i sor elemeinek összege is kevesebb mint 1-gyel változik, és tetszőleges $1 \le j \le n$-re az első j oszlop elemeinek összege is kevesebb mint 1-gyel változik.

7. **Beadandó.** Mutassuk meg, hogy ha egy páros gráf incidenciamátrixához hozzáadunk egy csupa 1 sort, akkor hálózati mátrixot kapunk, de ha egy csupa 1 oszlopot adunk hozzá, akkor nem feltétlenül.