Operációkutatás II, 3. gyakorlat 2011. március 2.

Emlékeztető. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $r(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c^T \in \mathbb{R}^n$. Legyen B egy bázis. Jelölések: $\overline{A} = B^{-1}A$, $\overline{b} = B^{-1}b$, $\overline{c} = c_B\overline{A} - c$.

1. Legyen $v_1, v_2, \dots, v_n$ bázis egy vektortérben, $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ és $1 \le j \le n$. Vezessük be a következő jelöléseket: $v'_i := v_i$ minden $i \neq j$ esetén és $v'_j := u$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:
$$v'_1, v'_2, \dots, v'_n \text{bázis} \iff \alpha_j \neq 0$$
2. Legyen $v_1, v_2, \dots, v_n$ bázis egy vektortérben, $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, $w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$ és $1 \le j \le n$. Vezessük be a következő jelöléseket: $v'_i := v_i$ minden $i \neq j$ esetén és $v'_j := u$, és tegyük fel, hogy $\alpha_j \neq 0$. Mik a w vektor koordinátái a $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$ bázisban?
3. A szimplex módszerben egy B bázisról báziscserével egy B' bázisra térünk át. Hogy számolhatjuk ki $\overline{A}, \overline{b}, \overline{c}$-ból $\overline{A}', \overline{b}', \overline{c}'$-t?
4. **Beadható.** Bizonyítsuk be a szimplex módszerre hivatkozás nélkül, hogy ha egy P poliédernek x^* egy olyan csúcsa, amire cx nem maximális, akkor x^*-ból indul olyan él, ami mentén cx nő.
5. Adott egy $P \subseteq \mathbb{Q}^n$ korlátos poliéder, $c \in \mathbb{Q}^n$, és egy $x \in P$ ami nem csúcs. Adjunk polinomiális algoritmust, ami talál egy x^* csúcsot amire $cx^* \ge cx$.
6. Tegyük fel, hogy egy feladatnál az optimális bázis nem degenerált, azaz $\overline{b}$ minden komponense pozitív. Hogyan lehet $\overline{A}, \overline{b}, \overline{c}$-ból kiolvasni, hogy a feladatnak végtelen sok optimális megoldása van-e?

Operációkutatás II, 3. gyakorlat 2011. március 2.

Emlékeztető. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $r(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c^T \in \mathbb{R}^n$. Legyen B egy bázis. Jelölések: $\overline{A} = B^{-1}A$, $\overline{b} = B^{-1}b$, $\overline{c} = c_B\overline{A} - c$.

1. Legyen $v_1, v_2, \dots, v_n$ bázis egy vektortérben, $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ és $1 \le j \le n$. Vezessük be a következő jelöléseket: $v'_i := v_i$ minden $i \ne j$ esetén és $v'_j := u$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:
$$v'_1, v'_2, \dots, v'_n \text{bázis} \iff \alpha_j \ne 0$$
2. Legyen $v_1, v_2, \dots, v_n$ bázis egy vektortérben, $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, $w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$ és $1 \le j \le n$. Vezessük be a következő jelöléseket: $v'_i := v_i$ minden $i \ne j$ esetén és $v'_j := u$, és tegyük fel, hogy $\alpha_j \ne 0$. Mik a w vektor koordinátái a $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$ bázisban?
3. A szimplex módszerben egy B bázisról báziscserével egy B' bázisra térünk át. Hogy számolhatjuk ki $\overline{A}, \overline{b}, \overline{c}$-ból $\overline{A}', \overline{b}', \overline{c}'$-t?
4. **Beadható.** Bizonyítsuk be a szimplex módszerre hivatkozás nélkül, hogy ha egy P poliédernek x^* egy olyan csúcsa, amire cx nem maximális, akkor x^*-ból indul olyan él, ami mentén cx nő.
5. Adott egy $P \subseteq \mathbb{Q}^n$ korlátos poliéder, $c \in \mathbb{Q}^n$, és egy $x \in P$ ami nem csúcs. Adjunk polinomiális algoritmust, ami talál egy x^* csúcsot amire $cx^* \ge cx$.
6. Tegyük fel, hogy egy feladatnál az optimális bázis nem degenerált, azaz $\overline{b}$ minden komponense pozitív. Hogyan lehet $\overline{A}, \overline{b}, \overline{c}$-ból kiolvasni, hogy a feladatnak végtelen sok optimális megoldása van-e?