

1. Órán szerepelt a minimális lefogó csúcshalmaz feladatra a mohó algoritmus: válasszunk ki egy maximális fokú csúcsot, tegyük be U -ba, és töröljük a rá illeszkedő élekkel együtt.

Most tekintsük a következő, fordított mohó algoritmust: válasszunk ki egy minimális fokú csúcsot, tegyük be az összes szomszédját U -ba, és töröljük őt és a szomszédait is a gráfból. Mutassunk példát, ahol a fordított mohó jobb mint a mohó, és olyat is, ahol a mohó a jobb.

2. Egy maximalizálási feladatra egy algoritmust α -közelítőnek nevezünk, ha tetszőleges inputra az output célfüggvény-értéke legalább $1/\alpha$ -szorosa az optimálisnak.

- Tudjuk, hogy a maximális független élhalmaz (azaz maximális párosítás) feladatra van 1-közelítő algoritmus. Milyen közelítő algoritmus adódik ebből a minimális fedő élhalmaz (olyan élhalmaz, ahol minden csúcsra legalább egy él illeszkedik) feladatra?
- Tudjuk, hogy a minimális lefogó csúcshalmaz feladatra van 2-közelítő polinomiális algoritmus. Milyen közelítő algoritmus adódik ebből a maximális független csúcshalmaz feladatra?

3. Adott egy $G = (V, E)$ gráf. Készítsünk belőle egy $G' = (V_1, V_2, E')$ páros gráfot a következőképpen. Minden $v \in V$ csúcsnak megfelel egy $v_1 \in V_1$ csúcs és egy $v_2 \in V_2$ csúcs. Minden $uv \in E$ élnek két él felel meg az új gráfban: u_1v_2 és v_1u_2 .

- Mit tudunk mondani G' -ben a minimális súlyú csúcsfedés feladat LP relaxáltjának bázismegoldásairól?
- Mi következik ebből a G -re vonatkozó minimális súlyú csúcsfedés feladat LP relaxáltjának bázismegoldásaira?

4. **Beadandó.** Mutassuk meg, hogy a 3-reguláris gráfok osztályában a mohó algoritmus is és a fordított mohó algoritmus is 2-nél jobb közelítést ad a minimális lefogó csúcshalmaz feladatra.

5. A Chicken játékban két játékos vezet egymással szemben, és az nyer aki nem tér ki a másik elől. Ha mindkettő kitér, a hasznuk 1, ha egyik sem tér ki, a hasznuk -2, ha pedig csak az egyik tér ki, az ő haszna -1, a másik játékosé pedig 2.

Kevert Nash-egyensúly: mindkét játékosnál valószínűségi eloszlás a lehetséges stratégiákon, ami azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy egy játékos akkor sem akar változtatni a saját eloszlásán, ha megismeri a másik eloszlását. Mutassuk meg, hogy a Chicken játékban három különböző kevert Nash-egyensúly van.

1. Órán szerepelt a minimális lefogó csúcshalmaz feladatra a mohó algoritmus: válasszunk ki egy maximális fokú csúcsot, tegyük be U -ba, és töröljük a rá illeszkedő élekkel együtt.

Most tekintsük a következő, fordított mohó algoritmust: válasszunk ki egy minimális fokú csúcsot, tegyük be az összes szomszédját U -ba, és töröljük őt és a szomszédait is a gráfból. Mutassunk példát, ahol a fordított mohó jobb mint a mohó, és olyat is, ahol a mohó a jobb.

2. Egy maximalizálási feladatra egy algoritmust α -közelítőnek nevezünk, ha tetszőleges inputra az output célfüggvény-értéke legalább $1/\alpha$ -szorosa az optimálisnak.

- Tudjuk, hogy a maximális független élhalmaz (azaz maximális párosítás) feladatra van 1-közelítő algoritmus. Milyen közelítő algoritmus adódik ebből a minimális fedő élhalmaz (olyan élhalmaz, ahol minden csúcsra legalább egy él illeszkedik) feladatra?
- Tudjuk, hogy a minimális lefogó csúcshalmaz feladatra van 2-közelítő polinomiális algoritmus. Milyen közelítő algoritmus adódik ebből a maximális független csúcshalmaz feladatra?

3. Adott egy $G = (V, E)$ gráf. Készítsünk belőle egy $G' = (V_1, V_2, E')$ páros gráfot a következőképpen. Minden $v \in V$ csúcsnak megfelel egy $v_1 \in V_1$ csúcs és egy $v_2 \in V_2$ csúcs. Minden $uv \in E$ élnek két él felel meg az új gráfban: u_1v_2 és v_1u_2 .

- Mit tudunk mondani G' -ben a minimális súlyú csúcsfedés feladat LP relaxáltjának bázismegoldásairól?
- Mi következik ebből a G -re vonatkozó minimális súlyú csúcsfedés feladat LP relaxáltjának bázismegoldásaira?

4. **Beadandó.** Mutassuk meg, hogy a 3-reguláris gráfok osztályában a mohó algoritmus is és a fordított mohó algoritmus is 2-nél jobb közelítést ad a minimális lefogó csúcshalmaz feladatra.

5. A Chicken játékban két játékos vezet egymással szemben, és az nyer aki nem tér ki a másik elől. Ha mindkettő kitér, a hasznuk 1, ha egyik sem tér ki, a hasznuk -2, ha pedig csak az egyik tér ki, az ő haszna -1, a másik játékosé pedig 2.

Kevert Nash-egyensúly: mindkét játékosnál valószínűségi eloszlás a lehetséges stratégiákon, ami azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy egy játékos akkor sem akar változtatni a saját eloszlásán, ha megismeri a másik eloszlását. Mutassuk meg, hogy a Chicken játékban három különböző kevert Nash-egyensúly van.