Operációkutatás II, 9. gyakorlat 2011. április 27.

Az előadáson szereplő forgalmi játéknak nézzük a diszkrét változatát. Adott $D = (V, E)$ digráf, c_e nemnegatív folytonos monoton növő függvények az éleken, és $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$ forrás-nyelő párok. Az i-edik játékos választ egy $s_i - t_i$ utat, és azon foglal egységnyi értéket. Az f multifolyam ezeknek az egység-folyamoknak az összege. A költség a folytonos forgalmi játékhoz hasonlóan van definiálva, de most ha egy játékos utat vált, akkor az egész egységnyi folyam átkerül az új útra.

1. Definiáljuk a $\Psi(f) = \sum_{e \in E} \sum_{i=0}^{f_e} c_e(i)$ függvényt. Mutassuk meg, hogy ha az i-edik játékos az f folyamban a P utat választotta, és f' az a folyam, ahol az i-edik játékos a P helyett a P' utat választja, akkor $\Psi(f) - \Psi(f') = c_P(f) - c_{P'}(f')$.

2. Az előző feladat segítségével mutassuk meg, hogy ebben a játékban mindig van tiszta Nash-egyensúly.

3. Mutassuk meg, hogy a szimmetrikus valós $n \times n$-es mátrixok $n(n+1)/2$ dimenziós terében a pozitív szemidefinit mátrixok konvex kúpot alkotnak.

4. Egy $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex kúp polárisa a $K^p = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x^T y \le 0 \ \forall y \in K\}$ halmaz. Mutassuk meg, hogy ez konvex kúp. Igaz-e, hogy $(K^p)^p = K$?

5. **Beadandó.** Mi a pozitív szemidefinit mátrixok kúpjának polárisa?

6. Mutassuk meg, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix, akkor az $f(x) = x^T A x$ függvény pontosan akkor konvex, ha A pozitív szemidefinit.

Operációkutatás II, 9. gyakorlat 2011. április 27.

Az előadáson szereplő forgalmi játéknak nézzük a diszkrét változatát. Adott $D = (V, E)$ digráf, c_e nemnegatív folytonos monoton növő függvények az éleken, és $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$ forrás-nyelő párok. Az i-edik játékos választ egy $s_i - t_i$ utat, és azon foglal egységnyi értéket. Az f multifolyam ezeknek az egység-folyamoknak az összege. A költség a folytonos forgalmi játékhoz hasonlóan van definiálva, de most ha egy játékos utat vált, akkor az egész egységnyi folyam átkerül az új útra.

1. Definiáljuk a $\Psi(f) = \sum_{e\in E} \sum_{i=0}^{f_e} c_e(i)$ függvényt. Mutassuk meg, hogy ha az i-edik játékos az f folyamban a P utat választotta, és f' az a folyam, ahol az i-edik játékos a P helyett a P' utat választja, akkor $\Psi(f) - \Psi(f') = c_P(f) - c_{P'}(f')$.

2. Az előző feladat segítségével mutassuk meg, hogy ebben a játékban mindig van tiszta Nash-egyensúly.

3. Mutassuk meg, hogy a szimmetrikus valós $n\times n$-es mátrixok $n(n+1)/2$ dimenziós terében a pozitív szemidefinit mátrixok konvex kúpot alkotnak.

4. Egy $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex kúp polárisa a $K^p = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x^T y \leq 0 \ \forall y \in K\}$ halmaz. Mutassuk meg, hogy ez konvex kúp. Igaz-e, hogy $(K^p)^p = K$?

5. **Beadandó.** Mi a pozitív szemidefinit mátrixok kúpjának polárisa?

6. Mutassuk meg, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, akkor az $f(x) = x^T Ax$ függvény pontosan akkor konvex, ha A pozitív szemidefinit.