Kiegészítés a *Poliéderes Kombinatorika* jegyzethez

Király Tamás

2021. március

1. T-kötések, T-vágások

Legyen $G = (V, E)$ egy összefüggő irányítatlan gráf, és legyen $T \subseteq V$ egy páros elemszámú csúcshalmaz (a terminálok halmaza)

Definíció. Az $F \subseteq E$ élhalmaz T-**kötés**, ha $d_F(v)$ pontosan akkor páratlan ha $v \in T$. Egy $[U, V \setminus U]$ vágás T-**vágás**, ha $T \cap U$ páratlan.

1. Feladat. *Mutassuk meg, hogy minden összefüggő gráfban van T-kötés. Mutassuk meg, hogy ha F T-kötés és $[U, V \setminus U]$ T-vágás, akkor $F \cap \delta(U)$ páratlan.*

Minimális súlyú T-kötés keresésével itt nem foglalkozunk, ez a téma a Kombinatorikus Optimalizálási Struktúrák jegyzet első fejezetében szerepel. Minimális súlyú T-vágás a Gomory-Hu fa segítségével található, a következő tételnek köszönhetően.

Legyen $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf, $c \in \mathbb{R}^E_+$ élsúlyokkal. Legyen H a Gomory-Hu fa $\gamma \in \mathbb{R}^T_+$ élsúlyokkal, és $e \in H$-ra jelölje U_e a $H - e$ egyik komponensét. A Gomory-Hu fa definíciója szerint tetszőleges $u, v \in V$-re igaz, hogy ha $e \in H$ az egyik minimális γ-súlyú él az $u-v$ úton H-ban, akkor $[U_e, V \setminus U_e]$ minimális c-súlyú $u - v$ vágás, és $d_c(U) = \gamma_e$.

1. Tétel. *Legyen T egy páros terminál-halmaz. Legyen $e \in H$ minimális súlyú olyan él, amire $U_e \cap T$ páratlan. Ekkor $[U_e, V \setminus U_e]$ minimális súlyú T-vágás G-ben.*

Bizonyítás. Legyen $G' = (V, E \cup H)$, és definiáljunk a $c' : E \cup H \to \mathbb{R}_+$ súlyozást úgy, hogy E-n megegyezik c-vel, H-n pedig 0. Világos, hogy G-ben és G'-ben ugyanazok a halmazok határoznak meg T-vágást, és a súlyuk is ugyanaz. Legyen $[U, V \setminus U]$ egy minimális súlyú T-vágás.

Legyen $J \subseteq H$ azoknak az $f \in H$ éleknek a halmaza, amikre $[U_f, V \setminus U_f]$ T-vágás. Könnyű ellenőrizni, hogy J egy T-kötés G'-ben, azaz pontosan T pontjaiban páratlan a fokszáma. Mivel G'-ben egy T-kötésnek és egy T-vágásnak mindig páratlan sok közös éle van, létezik $e = uv \in \Delta(U) \cap J$. Ekkor egyrészt $[U_e, V \setminus U_e]$ T-vágás, másrészt $d_c(U_e) \leq d_c(U)$, hiszen a Gomory-Hu fa tulajdonságai miatt $[U_e, V \setminus U_e]$ minimális súlyú $u - v$ vágás, és $[U, V \setminus U]$ is egy $u - v$ vágás. Azt kaptuk tehát, hogy $[U_e, V \setminus U_e)$ minimális súlyú T-vágás. $\square$

A következőkben a T-kötések és T-vágások poliédereivel foglalkozunk. A kiindulásunk Seymour tétele a minimális méretű T-kötésről páros gráfban. Ennek bizonyítása szerepel a jegyzetben (2.2.6. Tétel), úgyhogy itt csak kimondom:

2. Tétel (Seymour, Jegyzet 2.2.6. Tétel)**.** *Egy G összefüggő páros gráfban egy T-kötés minimális elemszáma egyenlő az élidegen T-vágások maximális számával.* $\square$

Legyen $\mathcal{P} = \{U \subseteq V : |U \cap T| \text{ páratlan}\}$. Legyen P a T-kötések poliédere, azaz a T-kötések karakterisztikus vektorainak konvex burka. Poliéderes szempontból kicsit könnyebb kezelni ennek felső burkát:

$$Q = P + \mathbb{R}^E_+ = \{x \in \mathbb{R}^E : \exists y \in P,\ y \leq x\}.$$

3. Tétel. *A következő rendszer $\frac{1}{2}$-TDI, és a T-kötések felső burkát írja le:*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0,\ d_x(U) \geq 1\ \forall U \in \mathcal{P}\}.$$

Bizonyítás. Minden T-kötés kielégíti a feltételeket, tehát a konvex burkuk is. A másik irányhoz belátjuk, hogy tetszőleges nemnegatív racionális c-re a $\min\{cx : x \in Q\}$ feladatnak van egész optimális megoldása. Ezt elég belátni olyan c-re, aminek minden komponense páros szám. A duális feladat:

$$\max\left\{\sum_{U\in\mathcal{P}} y_U : y \geq 0,\ \sum_{U:e\in\delta(U)} y_U \leq c_e\ \forall e \in E\right\}.$$

Konstruáljunk G-ből egy G' gráfot úgy, hogy minden e élt egy c_e hosszú úttal helyettesítünk. Seymour tételét alkalmazva erre a páros gráfra, van egy α szám, hogy G'-ben van α méretű T-kötés és α élidegen T-vágás. A T-kötésből kapunk egy α súlyú F T-kötést G-ben, a T-vágásokból pedig kapunk α darab T-vágást G-ben úgy, hogy az e él legfeljebb c_e darabban szerepel. Legyen y_U az U multiplicitása ezek közt a vágások közt; y így megengedett duális megoldás, α célfüggvény-értékkel. Ebből következik, hogy F karakterisztikus vektora optimális c-re a Q poliéderen.

A bizonyításból az is látszik, hogy páros c-re van egész optimális duális megoldás, tehát a rendszer $\frac{1}{2}$-TDI. $\square$

Megjegyzés. Maga a T-kötés poliédernek is van kezelhető leírása, de a fentinél kicsit bonyolultabb feltételek is kellenek.

Felvetődik a kérdés, hogy a T-vágások felső burka is hasonlóan egyszerűen leírható-e. Először is vegyük észre, hogy a T-kötésekkel ellentétben a T-vágások poliéderére nem várható kezelhető leírás, mert a maximális s–t vágás feladat NP-nehéz. Ezért talán meglepő, hogy a felső burok leírását egyből megkaphatjuk a 3. Tételből. Ehhez azonban először meg kell ismerkednünk a blokkoló poliéderek elméletével.

2. Blokkoló poliéderek

Legyen a V alaphalmazon $\mathcal{E}$ egy Sperner-rendszer, azaz egy olyan hipergráf, aminek nincs két egymást tartalmazó hiperéle.

Definíció. Az $\mathcal{E}$ **blokkere** az a hipergráf, ami az $\{Y \subseteq V : |X \cap Y| \geq 1\ \forall X \in \mathcal{E}\}$ tartalmazásra minimális elemeiből áll. Ezt a hipergráfot $\mathcal{B}(\mathcal{E})$-vel jelöljük.

2. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a tartalmazásra minimális T-kötések Sperner-rendszerének blokkere a tartalmazásra minimális T-vágások rendszere.*

3. Feladat. *Legyen az alaphalmazunk egy összefüggő irányítatlan gráf élhalmaza. Mi a tartalmazásra minimális (azaz elemi) vágások Sperner-rendszerének blokkere?*

4. Feladat. *Legyen az alaphalmazunk egy irányított gráf élhalmaza. Mi az r-gyökerű fenyők Sperner-rendszerének blokkere?*

5. Feladat. *Legyen az alaphalmazunk egy irányított gráf élhalmaza. Mi az $s-t$ utak Sperner-rendszerének blokkere?*

Világos, hogy $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ is Sperner-rendszer. Vegyük észre, hogy az üres hipergrafnak a blokkere az egyetlen, üres hiperélből álló „hipergráf”, és fordítva. Általában igaz a következő:

4. Lemma. *Tetszőleges $\mathcal{E}$ Sperner-rendszerre $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$.*

Bizonyítás. A blokker definíciója szerint minden $X \in \mathcal{E}$-re és $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$-re teljesül hogy $|X \cap Y| \geq 1$. A másik irány bizonyításához legyen Z egy olyan halmaz, aminek nincs $\mathcal{E}$-beli részhalmaza (ő maga sem az). Ekkor $Y = V \setminus Z$-re igaz, hogy $|X \cap Y| \geq 1$ minden $X \in \mathcal{E}$-re. A blokker definíciója szerint tehát létezik $Y' \subseteq Y$, hogy $Y' \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, így $Z \notin \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{E}))$. □

A $\mathcal{E}$ Sperner-rendszerhez tartozó fedési poliéder

$$P_{cov}(\mathcal{E}) = \{x \in \mathbb{R}^V : x \geq 0,\ \tilde{x}(Z) \geq 1\ \forall Z \in \mathcal{E}\}.$$

Világos, hogy $P_{cov}(\mathcal{E})$ bináris elemei közül azok csúcsok, amik $\mathcal{B}(\mathcal{E})$-beli halmazok karakterisztikus vektorai. $P_{cov}(\mathcal{E})$ pontosan akkor egész poliéder, ha nincs más csúcsa, azaz csúcsai pontosan a $\mathcal{B}(\mathcal{E})$-beli halmazok karakterisztikus vektorai. A következő tétel mutatja, hogy milyen szoros kapcsolat van $\mathcal{E}$ és $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ fedési poliédere között.

5. Tétel. *$P_{cov}(\mathcal{E})$ pontosan akkor egész poliéder, ha $P_{cov}(\mathcal{B}(\mathcal{E}))$ az.*

Bizonyítás. Legyen $P_1 = P_{cov}(\mathcal{E})$ és $P_2 = P_{cov}(\mathcal{B}(\mathcal{E}))$. Mivel $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$, elég belátni, hogy ha P_2 nem egész poliéder, akkor P_1 sem az. Ha P_2 nem egész poliéder, akkor van olyan $c \in \mathbb{Q}^V_+$ és $z^* \in P_2$, hogy $cz^* < 1$, de $\tilde{c}(Z) \geq 1$ minden $Z \in \mathcal{E}$-re. Az utóbbi azt jelenti, hogy $c^T \in P_1$. Tekintsük P_1-en a $c' = (z^*)^T$ célfüggvényt. Mivel $z^* \in P_2$, $c'y \geq 1$ minden egész pontjára P_1-nek, de $c'c^T < 1$, így P_1 nem egész poliéder. □

6. Következmény. *Legyen G összefüggő gráf, T páros terminálhalmaz, és jelölje $\mathcal{F}$ a tartalmazásra minimális T-kötések Sperner-rendszerét. A következő rendszer a T-vágások felső burkát írja le:*

$$\{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, \tilde{x}(F) \geq 1\ \forall F \in \mathcal{F}\}.$$

Bizonyítás. A 3. Tétel értelmében a T-vágások fedési poliédere egész. Mivel a T-vágások rendszerének blokkere a T-kötések rendszere, az 5. Tétel szerint a T-kötések fedési poliédere is egész, azaz csúcsai a T-vágások karakterisztikus vektorai. Ezért a T-kötések fedési poliédere megegyezik a T-vágások felső burkával. □

Megjegyzés. Az $\mathcal{E}$ Sperner-rendszert **ideális**nak nevezzük, ha $P_{cov}(\mathcal{E})$ egész poliéder. Az 5. Tétel azt mondja ki, hogy $\mathcal{E}$ pontosan akkor ideális ha $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ az. Ezen túl érdekes kérdés az is, hogy a $\min\{cx : x \in \mathbb{R}^V, x \geq 0,\ \tilde{x}(Z) \geq 1\ \forall Z \in \mathcal{E}\}$ rendszer mikor TDI; az ilyen hipergráfokat **Max-Flow-Min-Cut tulajdonságú**nak nevezzük. Itt már nem igaz, hogy ha egy hipergráf ilyen, akkor a blokkere is (feladat: konstruáljuk példát). A terület egyik legrégebbi nyitott kérdése a Replikációs Sejtés: igaz-e, hogy ha minden $\{0, 1, \infty\}$-értékű célfüggvényre van primál és duál egész optimális megoldás, akkor a hipergráf Max-Flow-Min-Cut tulajdonságú?

6. Feladat. *A korábbi feladatokban szereplő rendszerek közül melyek ideálisak?*

3. Antiblokkoló poliéderek

Ahogy az előző fejezetben, legyen a V alaphalmazon $\mathcal{E}$ egy Sperner-rendszer.

Definíció. Az $\mathcal{E}$ **antiblokkere** az a hipergráf, ami az $\{Y \subseteq V : |X \cap Y| \leq 1\ \forall X \in \mathcal{E}\}$ tartalmazásra maximális elemeiből áll. Ezt a hipergráfot $\mathcal{A}(\mathcal{E})$-vel jelöljük.

7. Feladat. *Mutassuk meg, hogy egy gráfban a tartalmazásra maximális klikkek Sperner-rendszerének blokkere a tartalmazásra maximális stabil csúcshalmazok rendszere.*

Világos, hogy $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ is Sperner-rendszer. A blokkerek esetével szemben azonban itt nem igaz, hogy $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$. Példaként tekinsünk egy háromszöget, azaz $\mathcal{E} = \{\{u, v\}, \{v, w\}, \{w, u\}\}$. Ekkor $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \{\{u\}, \{v\}, \{w\}\}$, és így $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{E})) = \{\{u, v, w\}\}$.

Definíció. Az $\mathcal{E}$ Sperner-rendszer **konform**, ha tetszőleges legalább kételemű $U \subseteq V$-re igaz a következő tulajdonság: ha $\{u,v\}$ része $\mathcal{E}$-beli halmaznak minden $u,v \in U$-ra, akkor U is része $\mathcal{E}$-beli halmaznak.

Az $\mathcal{E}$ Sperner-rendszer **perfekt**, ha a

$$P_{pack}(\mathcal{E}) = \{x \in \mathbb{R}^V : x \geq 0,\ \tilde{x}(Z) \leq 1\ \forall Z \in \mathcal{E}\}$$

pakolási poliéder egész.

A definícióból következik, hogy minden $\mathcal{E}$ konform Sperner-rendszerhez létezik egy olyan $G(\mathcal{E})$ gráf V csúcshalmazzal, aminek a tartamlazásra maximális klikkjei pont $\mathcal{E}$ elemei: $G(\mathcal{E})$ élei legyenek azok a párok, amik részei $\mathcal{E}$-beli halmaznak. A konformitás miatt minden klikk része $\mathcal{E}$-beli halmaznak; másrészt ha U nem klikk, akkor nem lehet $\mathcal{E}$-beli, hiszen van U-beli pontpár ami nem része $\mathcal{E}$-beli halmaznak.

Be fogjuk látni, hogy a perfekt Sperner-rendszerek pontosan azok, amikre $G(\mathcal{E})$ perfekt gráf. Ehhez több fontos tételen át vezet az út.

7. Lemma. *Ha $\mathcal{E}$ perfekt, akkor konform.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathcal{E}$ nem konform, és vegyünk egy tartalmazásra minimális U halmazt, ami megsérti a konformitás feltételét. Ekkor nyilván $|U| \geq 3$, és minden $u \in U$-ra $U - u$ része $\mathcal{E}$-belinek, de U maga nem. Legyen $x = \frac{1}{|U|-1}\chi^U$. Ekkor $x \in P_{pack}(\mathcal{E})$, és $\tilde{x}(U) > 1$, de $\tilde{z}(U) \leq 1$ minden $z \in P_{pack}(\mathcal{E}) \cap \mathbb{Z}^V$-re, ami bizonyítja, hogy $P_{pack}(\mathcal{E})$ nem egész poliéder. □

Konform esetben már hasonlók igazak, mint blokkereknél (sőt, még több is, mint látni fogjuk).

8. Lemma. *Tetszőleges konform $\mathcal{E}$ Sperner-rendszerre $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ is konform, és $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$.*

Bizonyítás. Mint láttuk, $\mathcal{E}$ megfelel a $G(\mathcal{E})$ gráf tartalmazásra maximális klikkjeinek, így $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ a $G(\mathcal{E})$ tartalmazásra maximális stabil halmazaiból áll, ami konform. Ennek antiblokkere megint a maximális klikkek halmaza. □

9. Tétel. *Ha $P_{pack}(\mathcal{E})$ egész poliéder, akkor $P_{pack}(\mathcal{A}(\mathcal{E}))$ is az.*

Bizonyítás. Nyilván elég azt az esetet nézni, amikor $\mathcal{E}$ konform. Legyen $P_1 = P_{pack}(\mathcal{E})$ és $P_2 = P_{pack}(\mathcal{A}(\mathcal{E}))$. Ha P_2 nem egész poliéder, akkor van olyan $c \in \mathbb{Q}_+^V$ és $z^* \in P_2$, hogy $cz^* > 1$, de $\tilde{c}(Z) \leq 1$ minden $Z \in \mathcal{E}$-re. Az utóbbi azt jelenti, hogy $c^T \in P_1$. Tekintsük P_1-en a $c' = (z^*)^T$ célfüggvényt. Mivel $z^* \in P_2$, $c'y \leq 1$ minden egész pontjára P_1-nek, de $c'c^T > 1$, így P_1 nem egész poliéder. □

Az előző fejezet végén említettük a fedési poliéderekre vonatkozó Replikációs Sejtést. Ennek pakolási poliéderekre vonatkozó megfelelője az úgynevezett Replikációs Lemma, amit Lovász László bizonytott. Az alábbiakban belátjuk ezt a lemmát, és segítségével a Gyenge Perfekt Gráf Tételt is. Tekintsük a következő primál-duál párt.

$$\max\{cx : x \in \mathbb{R}^V,\ x \geq 0,\ \tilde{x}(Z) \leq 1\ \forall Z \in \mathcal{E}\}, \tag{LP}$$

$$\min\left\{\sum_{Z\in\mathcal{E}} y_Z : y \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}},\ y \geq 0,\ \sum_{Z\in\mathcal{E}: v\in Z} y_Z \geq c_v\ \forall v \in V\right\}. \tag{D}$$

10. Tétel (Replikációs Lemma)**.** *Ha egy $\mathcal{E}$ konform hipergráfra tetszőleges $c \in \{0,1\}^V$ esetén* (LP)-*nek és* (D)-*nek is van egész optimális megoldása, akkor az* (LP) *rendszer TDI.*

Bizonyítás. $\|c\|_1$ szerinti indukcióval belátjuk, hogy tetszőleges $c \in \mathbb{Z}_+^V$ esetén (LP)-nek és (D)-nek van egész optimális megoldása; $c \in \{0,1\}^V$ esetén ezt tudjuk, tehát feltehetjük hogy van $u \in V$ amire $c_u \geq 2$. Jelölje OPT_c az (LP) optimum-értékét.

Legyen $c'_u = c_u - 1$, és $c'_v = c_v$ ha $v \neq u$. Jelölje (LP)$'$ és (D)$'$ a c'-re vonatkozó feladatokat. Az indukciós feltevés szerint c'-re vannak egész optimális megoldások; (LP)$'$-nek az optimális megoldásai tehát $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ azon hiperélei, melyek súlya $\mathrm{OPT}_{c'}$. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: Létezik $X \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$, amire $c'(X) = \mathrm{OPT}_{c'}$ és $u \in X$. Ekkor $\mathrm{OPT}_c \geq \mathrm{OPT}_{c'} + 1$. Legyen y' egy egész optimális megoldása (D)$'$-nek, és legyen $Z' \in \mathcal{E}$ tetszőleges amire $u \in Z'$. Ekkor a következő y optimális megoldása (D)-nek: $y_{Z'} = y'_{Z'} + 1$, $y_Z = y'_Z$ különben. A fenti X pedig optimális (LP)-re, hiszen súlya megegyezik a duál optimummal.

2. eset: $X \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$, $c'(X) = \mathrm{OPT}_{c'}$ esetén $u \notin X$. Legyen y' egy egész optimális megoldása (D)$'$-nek, és válasszunk egy $Z' \in \mathcal{E}$-t, amire $u \in Z'$ és $y'_{Z'} > 0$ (ilyen van, mert $c'_u > 0$). Legyen $c''_v = c'_v - 1$ ha $v \in Z - u$ és $c'_v > 0$, és $c''_v = c'_v$ különben. Ha $X \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ és $c'(X) = \mathrm{OPT}_{c'}$, akkor egyrészt $|X \cap Z'| = 1$ az optimalitási feltételek miatt, másrészt $u \notin X$ a 2. eset feltevése miatt, harmadrészt $c'_v = 0$ esetén $v \notin X \cap Z'$ a v-re vonatkozó optimalitási feltétel miatt. Így azt kapjuk, hogy $\mathrm{OPT}_{c''} = \mathrm{OPT}_{c'} - 1 \leq \mathrm{OPT}_c - 1$. Legyen y'' egy egész optimális megoldása (D)$''$-nek. Ekkor a következő y optimális megoldása (D)-nek: $y_{Z'} = y''_{Z'} + 1$, $y_Z = y''_Z$ különben. Az (LP)$'$ tetszőleges optimális egész megoldása pedig optimális (LP)-re, hiszen súlya megegyezik a duál optimummal. □

A Replikációs Lemma segítségével belátjuk a perfekt gráfok poliéderes jellemzését. Egy G gráfra legyen

$$P(G) = \{x \in \mathbb{R}^V : \ x \geq 0, \ x(S) \leq 1 \text{ minden } S \text{ stabil csúcshalmazra}\}.$$

Emlékeztetőül, egy gráf *perfekt*, ha tetszőleges feszített részgráfban a maximális klikkméret és a kromatikus szám megegyezik, azaz

$$\omega(G[U]) = \chi(G[U]) \quad \forall U \subseteq V.$$

11. Tétel (Fulkerson, Chvátal)**.** *Egy G gráf pontosan akkor perfekt, ha $P(G)$ egész poliéder.*

Bizonyítás. Legyen G perfekt gráf, $\mathcal{E}$ a tartalmazásra maximális stabil halmazok hipergráfja, és $c \in \{0,1\}^V$. Legyen $U = \{v \in V : c_v = 1\}$. Az $\omega(G[U]) = \chi(G[U])$ tulajdonság pont azt jelenti, hogy c-re (LP)-nek és (D)-nek is van egész optimális megoldása. A Replikációs Lemma szerint tehát (LP) TDI, így $P_{pack}(\mathcal{E}) = P(G)$ egész poliéder.

A másik irányhoz indirekt tegyük fel, hogy G nem perfekt de $P(G)$ egész, és legyen U egy tartalmazásra minimális csúcshalmaz, amire $\omega(G[U]) < \chi(G[U])$. Legyen c az U karakterisztikus vektora. Mivel $P(G)$ egész poliéder, a dualitás tétel miatt van y duális megoldás amire $\sum y_S = \omega(G[U])$. Ha $y_S > 0$, akkor az optimalitási feltételek miatt $|S \cap K| = 1$ minden K maximális méretű klikkre $G[U]$-ban. Válasszunk egy tetszőleges ilyen S-et; ekkor

$$\omega(G[U \setminus S]) \leq \omega(G[U]) - 1 < \chi(G[U]) - 1 \leq \chi(G[U \setminus S]),$$

ellentmondva U minimális választásának. □

12. Következmény (Gyenge Perfekt Gráf Tétel)**.** *Egy G gráf pontosan akkor perfekt, ha komplementere perfekt*

13. Következmény. *Egy $\mathcal{E}$ Sperner-rendszerre a következők ekvivalensek:*

(i) $\mathcal{E}$ perfekt

(ii) $\mathcal{E}$ konform és $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ perfekt

(iii) $\mathcal{E}$ konform és $G(\mathcal{E})$ perfekt gráf

(iv) Az (LP) *rendszer TDI*

Bizonyítás. A korábbi tételek egyszerű következményei:

- (i) ⇒ (ii): 9. Tétel

- (ii) $\Rightarrow$ (iii): 7. Lemma, 8. Lemma, 11. Tétel
- (iii) $\Rightarrow$ (iv): Replikációs Lemma
- (iv) $\Rightarrow$ (i): A rendszer TDI-sága és a jobboldal egészsége miatt $P_{pack}(\mathcal{E})$ egész poliéder.

$\square$

4. Színes Carathéodory tétel

Bárány Imre bizonyította be a Carathéodory tétel következő általánosítását.

14. Tétel (Színes Carathéodory Tétel)**.** *Legyenek* $X_1 \subseteq \mathbb{R}^n, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n, \ldots, X_{n+1} \subseteq \mathbb{R}^n$ *olyanok, hogy* $0 \in \text{conv}(X_i)$ *minden* i*-re. Ekkor létezik* $v_1 \in X_1, \ldots, v_{n+1} \in X_{n+1}$*, hogy* $0 \in \text{conv}(\{v_1, \ldots, v_{n+1}\})$*.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy az $X_1, \ldots, X_{n+1}$ halmazok végesek. Legyen $X = \cup_{i=1}^{n+1} X_i$. Egy $Y = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq X$ halmazt **tarkának** nevezünk, ha léteznek különböző $i_1, \ldots, i_k$ indexek, hogy $v_j \in X_{i_j}$ minden j-re. Legyen T egy olyan legfeljebb n elemű tarka halmaz, amire $\text{conv}(T)$ legközelebb van az origóhoz. Ha $0 \in \text{conv}(T)$, akkor kész vagyunk; ellenkező esetben legyen α a $\text{conv}(T)$ távolsága a 0-tól, és H a $\text{conv}(T)$-t és a $B(0, \alpha)$ gömböt gyengén elválasztó hipersík.

Legyen i olyan index, ami nem szerepel az i_j-k között. Mivel $0 \in \text{conv}(X_i)$, létezik $v \in X_i$ a H-nak a 0 felőli nyílt félterében. Ha $0 \in \text{conv}(T + v)$, akkor kész vagyunk, hiszen $T + v$ tarka, tehát feltehetjük, hogy nem ez a helyzet. Legyen w a $\text{conv}(T + v)$ 0-hoz legközelebbi pontja. Mivel $\text{conv}(T + v)$ metszi a $B(0, \alpha)$ gömb belsejét, w közelebb van 0-hoz mint T. Másrészt w rajta van $\text{conv}(T + v)$ egy legfeljebb n dimenziós oldalán, tehát létezik $u \in T$, hogy $\text{conv}(T - u + v)$ közelebb van 0-hoz mint T, ami ellentmondás. $\square$

Egy kicsit erősebb tétel is bizonyítható egyszerű topologikus módszerekkel:

15. Tétel. *Legyenek* $X_1 \subseteq \mathbb{R}^n, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n, \ldots, X_{n+1} \subseteq \mathbb{R}^n$ *olyan nemüres halmazok, hogy* $0 \in \text{conv}(X_i \cup X_j)$ *minden* $i \neq j$*-re. Ekkor létezik* $v_1 \in X_1, \ldots, v_{n+1} \in X_{n+1}$*, hogy* $0 \in \text{conv}(\{v_1, \ldots, v_n\})$*.*

Bizonyítás. A bizonyítás eleje azonos az előző tételével; itt is legyen α a $\text{conv}(T)$ távolsága a 0-tól, és H a $\text{conv}(T)$-t és a $B(0, \alpha)$ gömböt gyengén elválasztó hipersík. Legyen H^- a H-nak a 0 felőli nyílt féltere.

Ha az i index nem szerepel az i_j-k között, és létezik $v \in X_i \cap H^-$, akkor ugyanúgy kész vagyunk mint az előző bizonyításban. Ellenkező esetben van $n+1-k$ index amire $X_i \cap H^- = \emptyset$. A feltevésünk szerint ez csak $k = n$ esetén lehetséges, ráadásul $\text{conv}(T)$ $(n-1)$-dimenziós szimplex, jelölje S.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel hogy $T = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ahol $v_j \in X_j$ $(j \in [n])$. A feltevésünk szerint $X_j \cap H^- \neq \emptyset$ $(j \in [n])$; legyen $v'_j \in X_j \cap H^-$ $(j \in [n])$. Legyen w az S 0-hoz legközelebbi pontja, azaz $w = S \cap B(0, \alpha)$; ekkor $w \in \text{int}(S)$.

Legyen $z \in X_{n+1}$; az eddigiekből tudjuk, hogy $z \notin H^-$. Legyen L_1 a w irányú félegyenes 0-ból, és L_2 a $-z$ irányú félegyenes 0-ból. Figyeljük meg, hogy L_1 w-ben metszi H-t, míg L_2 nem metszi. Legyen $L = L_1 \cup L_2$.

Tekintsük az n-dimenziós β_n kereszt-politópot, aminek csúcsai e_j $(j \in [n])$ és $-e_j$ $(j \in [n])$, és jelölje $\partial\beta_n$ a határát. Létezik egy f folytonos leképezés $\partial\beta_n$-ről egy Q szimpliciális komplexusra úgy, hogy $f(e_i) = v_i$, $f(-e_i) = v'_i$ $(j \in [n])$, és f lineáris β_n minden lapjára megszorítva. Következésképp Q minden szimplexe tarka, és a linearitás miatt $\text{int}(S)$ pontjai csak az S szimplexben szerepelnek.

Legyen $Q' = Q \setminus \text{int}(S)$. Ez egy $(n-1)$-dimenziós gömbbel homeomorf szimpliciális komplexus, aminek határa ugyanaz mint S határa. Mivel $L \cap S = \{w\}$, ∂S egy nem-összehúzható kör az $\mathbb{R}^n \setminus L$ topologikus térben.

Mivel $\partial Q' = \partial S$, Q' nem lehet diszjunkt L-től, hiszen Q'-ben $\partial Q'$ összehúzható. Legyen $w' \in L \cap Q'$, és legyen T' a w'-t tartalmazó Q'-beli tarka szimplex csúcshalmaza.

Ha $w' \in L_1$, akkor w' közelebb van 0-hoz mint w, ellentmondásban T választásával. Ha $w' \in L_2$, akkor $T' \cup \{z\}$ tarka, és $0 \in \text{conv}(T' \cup \{z\})$. $\square$