Operációkutatás I, 8. gyakorlat 2011. november 16.

1. Vezessük le az MFMC tételből egy tételt arra vonatkozóan, hogy mikor létezik egy páros gráfnak előírt fokú részgráfja.

2. Egy faipari cégnek n erdőterülete van, és meg akarja határozni a következő k év mindegyikében, hogy melyik területről mennyi fát termeljen ki. Az i-edik területről összesen a_i tonna fa termelhető ki. Azonban csak az elég idős fák termelhetők ki: az i-edik területen a j-edik évben b_{ij} tonnányi fa elég idős a kitermeléshez (persze ha egy fát egy évben kivágtunk, azt a következő évben nem vághatjuk ki újra!). A j-edik évben összesen legfeljebb c_j tonna fát szabad kitermelni. Adjunk polinomiális algoritmust, amik kiszámolja a maximálisan kitermelhető famennyiséget.

3. Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $c : A \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ kapacitásfüggvény és $s, t \in V$ két kijelölt pont. Lássuk be, hogy pontosan akkor létezik tetszőlegesen nagy értékű $s - t$ folyam, ha létezik egy irányított út s-ből t-be melynek minden éle $+\infty$ kapacitású! (Egy folyamban az éleken mindig véges értékek vannak!)

4. Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $f \colon A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $g \colon A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $p, b \colon V \to \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy pontosan akkor létezik

$$x \colon A \to \mathbb{R},$$
$$p(v) \le \varrho_x(v) - \delta_x(v) \le b(v) \ \forall v \in V,$$
$$f \le x \le g$$

általánosított áram, ha

$$\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \le \min\{b(Z), -p(V - Z)\} \ \forall Z \subseteq V.$$

5. **Beadandó.** Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf. Egy kijelölt $s \in V$ pontjában ül a parancsnok, $s \notin B \subset V$ halmaz pontjaiban ülnek a beosztottjai. Egymással a gráf élein keresztül kommunikálhatnak. Minden élre adott az él átvágásának költsége. Hogyan kereshetünk meg egy minimális költségű élhalmazt, amelynek átvágásával megszüntethetünk minden kommunikációt a parancsnok és a beosztottjai között?

Operációkutatás I, 8. gyakorlat 2011. november 16.

1. Vezessük le az MFMC tételből egy tételt arra vonatkozóan, hogy mikor létezik egy páros gráfnak előírt fokú részgráfja.

2. Egy faipari cégnek n erdőterülete van, és meg akarja határozni a következő k év mindegyikében, hogy melyik területről mennyi fát termeljen ki. Az i-edik területről összesen a_i tonna fa termelhető ki. Azonban csak az elég idős fák termelhetők ki: az i-edik területen a j-edik évben b_{ij} tonnányi fa elég idős a kitermeléshez (persze ha egy fát egy évben kivágtunk, azt a következő évben nem vághatjuk ki újra!). A j-edik évben összesen legfeljebb c_j tonna fát szabad kitermelni. Adjunk polinomiális algoritmust, amik kiszámolja a maximálisan kitermelhető famennyiséget.

3. Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $c : A \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ kapacitásfüggvény és $s, t \in V$ két kijelölt pont. Lássuk be, hogy pontosan akkor létezik tetszőlegesen nagy értékű $s - t$ folyam, ha létezik egy irányított út s-ből t-be melynek minden éle $+\infty$ kapacitású! (Egy folyamban az éleken mindig véges értékek vannak!)

4. Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $f\colon A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $g\colon A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $p, b\colon V \to \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy pontosan akkor létezik

$$x\colon A \to \mathbb{R},$$
$$p(v) \le \varrho_x(v) - \delta_x(v) \le b(v)\ \forall v \in V,$$
$$f \le x \le g$$

általánosított áram, ha

$$\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \le \min\{b(Z), -p(V - Z)\}\ \forall Z \subseteq V.$$

5. **Beadandó.** Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf. Egy kijelölt $s \in V$ pontjában ül a parancsnok, $s \notin B \subset V$ halmaz pontjaiban ülnek a beosztottjai. Egymással a gráf élein keresztül kommunikálhatnak. Minden élre adott az él átvágásának költsége. Hogyan kereshetünk meg egy minimális költségű élhalmazt, amelynek átvágásával megszüntethetünk minden kommunikációt a parancsnok és a beosztottjai között?