

Kiegészítés az Operációkutatás jegyzethez

Király Tamás (tamas.kiraly@ttk.elte.hu)

2025. december 26.

1. Minden metszetkúp egyben generált kúp is

Ebben a fejezetben kicsit egyszerűbb bizonyítást adunk arra a tételre, hogy minden metszetkúp előáll generált kúpként. Felhasználjuk a Farkas Lemmát, valamint azt a tételt, hogy minden generált kúp előáll metszetkúpként.

Egy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixra legyen $M_A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq \mathbf{0}\}$, G_A pedig jelölje az A sorai által generált kúpot \mathbb{R}^n -ben. Tudjuk, hogy G_A előáll metszetkúpként, azaz van olyan $k \in \mathbb{Z}$ szám és $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, hogy $G_A = M_B$.

1.1. tétel. $M_A = G_B$.

Bizonyítás. Először a $G_B \subseteq M_A$ tartalmazást bizonyítjuk. Mivel $G_A = M_B$, A minden sora benne van M_B -ben, azaz $BA^T \leq \mathbf{0}$. De ez ekvivalens azzal, hogy $AB^T \leq \mathbf{0}$, vagyis B minden sora benne van M_A -ban, amiből következik, hogy $G_B \subseteq M_A$.

Az $M_A \subseteq G_B$ tartalmazást indirekten látjuk be. Tegyük fel, hogy létezik $z \in M_A \setminus G_B$. Mivel $z \notin G_B$, a Farkas Lemma szerint létezik olyan $y^T \in \mathbb{R}^n$ vektor, amire $yB^T \geq \mathbf{0}$ és $yz < 0$. Legyen $x = -y^T$; ekkor $Bx \leq \mathbf{0}$ és $x^T z > 0$. Az előbbi azt jelenti, hogy $x \in M_B$, tehát $G_A = M_B$ miatt $x \in G_A$, azaz létezik $\lambda^T \in \mathbb{R}_+^m$, hogy $x^T = \lambda A$. Viszont $z \in M_A$ azt jelenti, hogy $Az \leq \mathbf{0}$, így a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$x^T z = (\lambda A)z = \lambda(Az) \leq 0,$$

ami ellentmond $x^T z > 0$ -nak. □

2. Minimális költségű k -nagyságú folyam

Ebben a fejezetben a jegyzetben szereplőnél kicsit egyszerűbben mutatjuk be a minimális költségű folyam algoritmust, a min-max tétel bizonyítása nélkül. Legyen $D = (V, E)$ egy irányított gráf, és $s \in V$ egy kijelölt forrás, $t \in V$ pedig egy kijelölt nyelő. Adottak $g \in \mathbb{Z}_+^E$ élkapacitások, és $c^T \in \mathbb{R}_+^E$ élköltségek.

Az alábbiakban főleg egészértékű megengedett folyamokkal foglalkozunk, azaz olyan $x \in \mathbb{Z}^E$ vektorokkal, amikre $q_x(v) = \delta_x(v)$ minden $v \in V \setminus \{s, t\}$ csúcsra, és $0 \leq x_e \leq g_e$ minden $e \in E$ élre. Az x folyam *nagysága* $\delta_x(s)$, a *költsége* pedig $cx = \sum_{e \in E} c_e x_e$.

2.1. definíció. Az $x \in \mathbb{Z}^E$ egészértékű megengedett folyam *extrém*, ha $cx \leq cx'$ minden olyan x' egészértékű megengedett folyamra, amire $\delta_{x'}(s) = \delta_x(s)$. Máshogy fogalmazva, x minimális költségű a vele azonos nagyságú egészértékű megengedett folyamok között.

Legyen K a maximális folyamnagyság. A célunk az, hogy minden $k \in \{0, 1, \dots, K\}$ értékre kiszámoljunk egy k -nagyságú extrém folyamat. Ha $k = 0$, akkor c nemnegativitása miatt az $x = \mathbf{0}$ folyam nyilvánvalóan extrém. Elég tehát azt a feladatot megoldanunk, hogy ha már ismerünk egy k -nagyságú extrém folyamat, ahol $k < K$, akkor ennek segítségével polinom időben számoljunk ki egy $(k+1)$ -nagyságú extrém folyamat. Látni fogjuk, hogy ez a Ford-Fulkerson algoritmus kis módosításával megtehető.

Legyen tehát x egy k -nagyságú extrém folyam. A $D_x = (V, E_x)$ segédgráfot a szokásos módon definiáljuk:

$$E_x = \{uv : uv \in E, x_{uv} < g_{uv}\} \cup \{uv : vu \in E, x_{vu} > 0\},$$

ahol az előbbi típusú éleket D_x *előre-éleinek*, az utóbbi típusúakat D_x *hátra-éleinek* nevezzük. Vezessük be a következő súlyozást D_x élein:

$$c'_{uv} = \begin{cases} c_{uv} & \text{ha } uv \text{ előre-él } D_x\text{-ben,} \\ -c_{vu} & \text{ha } uv \text{ hátra-él } D_x\text{-ben.} \end{cases} \quad (1)$$

2.2. lemma. *Ha x extrém, akkor c' konzervatív súlyozás.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy van egy C negatív irányított kör D_x -ben a c' súlyozásra nézve. Legyen $x' \in \mathbb{Z}^E$ a következő:

$$x'_{uv} = \begin{cases} x_{uv} + 1 & \text{ha } uv \text{ előre-él } C\text{-ben,} \\ x_{uv} - 1 & \text{ha } vu \text{ hátra-él } C\text{-ben,} \\ x_{uv} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A segédgráf definíciójából és x egészértékűségéből látható, hogy x' is egészértékű k -nagyságú megengedett folyam. A költségére pedig azt kapjuk, hogy $cx' = cx + c'(C)$, ami szigorúan kisebb mint cx , hiszen $c'(C) < 0$ a feltevésünk szerint. Ez azonban ellentmond annak, hogy x extrém. \square

Tudjuk, hogy D_x -ben létezik irányított $s - t$ út, hiszen $k < K$, tehát a Ford-Fulkerson algoritmus talál javító utat. Mivel c' konzervatív, a Bellman-Ford algoritmussal polinom időben tudunk egy c' -re nézve minimális súlyú $s - t$ utat találni D_x -ben. Az alábbi lemma mutatja, hogy egy ilyen út segítségével tudunk $(k + 1)$ -nagyságú extrém folyamot konstruálni.

2.3. lemma. *Legyen P egy c' -re nézve minimális súlyú $s - t$ út D_x -ben, és definiáljuk az x' folyamot a következőképpen:*

$$x'_{uv} = \begin{cases} x_{uv} + 1 & \text{ha } uv \text{ előre-él } P\text{-ben,} \\ x_{uv} - 1 & \text{ha } vu \text{ hátra-él } P\text{-ben,} \\ x_{uv} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor x' extrém $(k + 1)$ -nagyságú folyam.

Bizonyítás. A definíciókból látszik, hogy x' egy $(k + 1)$ -nagyságú egészértékű megengedett folyam. Azt kell tehát belátnunk, hogy az ilyen folyamok között a legolcsóbb. Legyen x^* egy legolcsóbb ilyen folyam; megmutatjuk, hogy $cx' \leq cx^*$. Ehhez definiálunk egy új $D^* = (V, E^*)$ segédgráfot a következőképpen:

$$E^* = \{uv : uv \in E, x_{uv} < x^*_{uv}\} \cup \{uv : vu \in E, x_{vu} > x^*_{vu}\},$$

ahol az előbbi típusú éleket D^* *előre-éleinek*, az utóbbi típusúakat D^* *hátra-éleinek* nevezzük. Vegyük észre, hogy $E^* \subseteq E_x$.

2.4. állítás. *D^* -ban van irányított $s - t$ út.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy nincs, és legyen U az s -ből D^* -ban elérhető csúcsok halmaza. Ekkor D^* -ban nem lép ki él U -ból, tehát D -ben minden U -ból kilépő uv élen $x_{uv} \geq x^*_{uv}$, és minden U -ba belépő vu élen $x_{vu} \leq x^*_{vu}$. Ez azonban azt jelenti, hogy $k = \delta_x(U) - \rho_x(U) \geq \delta_{x^*}(U) - \rho_{x^*}(U) = k + 1$, ami ellentmondás. (Az első és utolsó egyenlőség azért teljesül, mert $s \in U$ és $t \notin U$, tehát az U -ból kilépő és U -ba belépő folyam különbsége egyenlő a folyam nagysággal.) \square

Legyen Q egy irányított $s - t$ út D^* -ban. Definiáljuk a következő egészértékű x'' folyamot:

$$x''_{uv} = \begin{cases} x^*_{uv} - 1 & \text{ha } uv \text{ előre-él } Q\text{-ban,} \\ x^*_{uv} + 1 & \text{ha } vu \text{ hátra-él } Q\text{-ban,} \\ x^*_{uv} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Megfigyelhetjük, hogy x'' megengedett folyam, hiszen ha uv előre-él Q -ban, akkor $x_{uv}^* \geq x_{uv} + 1 \geq 1$, és ha vu hátra-él Q -ban, akkor $x_{uv}^* \leq x_{uv} - 1 \leq g_{uv} - 1$. Az x'' folyam költsége a c' definícióját felhasználva $cx'' = cx^* - c'(Q)$. Az is világos, hogy x'' egy egészértékű k -nagyságú folyam, tehát nem lehet olcsóbb, mint x , ami extrém k -nagyságú folyam. Így $cx \leq cx'' = cx^* - c'(Q)$, azaz $cx + c'(Q) \leq cx^*$.

Másrészt $Q \subseteq E^* \subseteq E_x$ és P egy c' -re nézve minimális súlyú $s - t$ út D_x -ben, tehát $c'(P) \leq c'(Q)$. Az egyenlőtlenségeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$cx' = cx + c'(P) \leq cx + c'(Q) \leq cx^*.$$

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk. □

A lemmát alkalmazva az azonosan 0 folyamból kiindulva minden $k \in \{0, 1, \dots, K\}$ értékre meg tudunk találni egy k -nagyságú extrém folyamot. A futási idő $O(K|V||E|)$, mivel K -szor kell a Bellman-Ford algoritmust futtatni.

Felvetődik a kérdés, hogy egy extrém folyamnál lehete-e olcsóbb egy ugyanolyan nagyságú nem-egészértékű folyam. A következő tétel megmutatja, hogy ez lehetetlen.

2.5. tétel. *Legyen x egy extrém k -nagyságú folyam, és $x' \in \mathbb{R}^E$ egy tetszőleges megengedett k -nagyságú folyam. Ekkor $cx \leq cx'$.*

Bizonyítás. Definiáljuk D_x élein a c' súlyozást úgy mint (1)-ben. A 2.2. Lemma szerint c' konzervatív, így létezik hozzá egy $\pi \in \mathbb{R}^V$ megengedett potenciál. A c' definícióját figyelembe véve π megengedettsége a következőt jelenti a D irányított gráfon:

$$\begin{aligned} \pi_v - \pi_u &\leq c_{uv} \text{ ha } uv \in E \text{ és } x_{uv} < g_{uv}, \\ \pi_v - \pi_u &\geq c_{uv} \text{ ha } uv \in E \text{ és } x_{uv} > 0. \end{aligned}$$

Legyen $z_e = x'_e - x_e$ ($e \in E$); ekkor z áram, hiszen x és x' is k -nagyságú folyam. Ha $z_{uv} > 0$, akkor $x_{uv} < x'_{uv} \leq g_{uv}$, tehát $\pi_v - \pi_u \leq c_{uv}$. Másrészt ha $z_{uv} < 0$, akkor $x_{uv} > x'_{uv} \geq 0$, tehát $\pi_v - \pi_u \geq c_{uv}$. Így a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} cx' - cx &= cz = \sum_{e \in E: z_e > 0} c_e z_e + \sum_{e \in E: z_e < 0} c_e z_e \geq \sum_{uv \in E: z_{uv} > 0} (\pi_v - \pi_u) z_{uv} + \sum_{uv \in E: z_{uv} < 0} (\pi_v - \pi_u) z_{uv} \\ &= \sum_{uv \in E} (\pi_v - \pi_u) z_{uv} = \sum_{v \in V} \pi_v (\rho_z(v) - \delta_z(v)) = 0, \end{aligned}$$

Azaz $cx \leq cx'$, bizonyítva a tételt. □

3. Konvex optimalizálás

3.1. Konvex halmazok

Egy $C \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz *konvex*, ha tetszőleges $x \in C$, $y \in C$ pontokra és $0 \leq \lambda \leq 1$ számra $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. A definícióból következik, hogy tetszőleges számú konvex halmaz metszete is konvex, és minden féltér konvex, így minden poliéder is konvex.

3.1. definíció. Az $x^1 \in \mathbb{R}^n, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ vektorok egy *affin kombinációja* egy olyan vektor, ami előáll $\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ alakban, ahol $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Egy $X \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz *affin burka* az összes olyan vektorból áll, ami X véges sok elemének affin kombinációja. Ez egyben a legszűkebb affin altér, ami tartalmazza X -et; jelölése: $\text{aff}(X)$. Az affin burok lineáris eltoltját $\text{lin}(X)$ jelöli. Az X halmaz *dimenziója*: $\dim(X) = \dim(\text{lin}(X))$. Az X halmaz *lezártját* úgy kapjuk, hogy X -hez hozzávesszük az X -beli pontsorozatok torlódási pontjait; ezt $\text{cl}(X)$ jelöli. Az X halmaz *zárt*, ha $\text{cl}(X) = X$, és *nyílt*, ha $\mathbb{R}^n \setminus X$ zárt.

Konvex halmazok szeparációja

Az alábbiakban $\|\cdot\|$ a vektor hosszát, azaz a 2-normáját jelöli.

3.2. tétel. *Ha $C \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és $z \notin C$, akkor van egy egyértelmű z -hez legközelebbi pont C -ben.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \inf \{\|x - z\| : x \in C\}$, és legyen $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - z\| \leq 2\alpha\}$. Létezik $x^k \in B \cap C$ ($k = 1, 2, \dots$) pontsorozat, amire $\|x^k - z\| \rightarrow \mu$, és mivel $B \cap C$ korlátos és zárt, ennek a pontsorozatnak van konvergens részsorozata, ami egy $x^* \in C$ ponthoz tart. Így $\|x^* - z\| = \mu$.

Ha $x' \in C$ -re $\|x' - z\| = \mu$, akkor $\frac{x'+x^*}{2} \in C$ és $\frac{x'+x^*}{2} - z$ merőleges $x' - x^*$ -ra, így $\mu^2 \leq \|\frac{x'+x^*}{2} - z\|^2 = \mu^2 - \frac{1}{4}\|x' - x^*\|^2$, ami csak $x' = x^*$ esetén lehetséges. \square

3.3. definíció (Vetítés konvex zárt halmazra). Legyen C zárt konvex halmaz. A $z \notin C$ ponthoz legközelebbi pontot C -ben a z pont C -re való vetületének nevezzük, jelölése $\pi_C(z)$.

3.4. tétel (Konvex szeparációs tétel). *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz, és $z \notin C$. Ekkor létezik $w^T \in \mathbb{R}^n$ és $\varepsilon > 0$, amire $wx \leq wz - \varepsilon$ tetszőleges $x \in C$ -re.*

Bizonyítás. Figyeljük meg, hogy ha $x \in C$, akkor $(z - \pi_C(z))^T(x - \pi_C(z)) \leq 0$, hiszen különben az $[x, \pi_C(z)]$ szakaszon lenne olyan pont, ami közelebb van z -hez, mint $\pi_C(z)$. Legyen $w = (z - \pi_C(z))^T$, és legyen $\varepsilon = \|w\|^2$. Így $wx \leq w\pi_C(z) = wz - w(z - \pi_C(z)) = wz - \varepsilon$. \square

A konvex szeparációs tétel segítségével alternatív bizonyítás adható a Farkas Lemmára.

3.5. tétel (Farkas Lemma). *Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $b \in \mathbb{R}^m$. Az $Ax = b$, $x \geq 0$ rendszer akkor és csak akkor nem megoldható, ha $\exists y^T \in \mathbb{R}^m : yA \geq 0$, $yb < 0$.*

Bizonyítás. Csak a nemtriviális irányt bizonyítjuk. Legyen K az A oszlopai által generált kúp \mathbb{R}^m -ben. Ez konvex zárt halmaz, és $b \notin K$, így a konvex szeparációs tétel szerint $\exists w^T \in \mathbb{R}^m : wx < wb$ minden $x \in K$ -ra. Ez csak úgy lehet, hogy $wx \leq 0$ minden $x \in K$ -ra (speciálisan A minden oszlopára), hiszen tetszőleges $\lambda > 0$ -ra λx is K -ban van. Így $wA \leq 0$; másrészt $0 \in K$ miatt $wb > 0$. Tehát $y = -w$ jó választás. \square

A következő célunk nem feltétlenül zárt halmazokra is belátni egy elválasztási tételt. Ehhez szükségünk van a következő lemmára.

3.6. lemma. *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz, $z \notin C$, és B egy z -t tartalmazó nyílt halmaz. Ekkor $B \cap C$ nem sűrű B -ben.*

Bizonyítás. Mivel B nyílt, létezik olyan $S \subseteq B$, $|S| = n + 1$ halmaz, amire z az S konvex burkának belsejében van. Ha $B \cap C$ sűrű B -ben, akkor minden $s \in S$ ponthoz tetszőlegesen közel van $B \cap C$ -beli pont, tehát létezik olyan $S' \subseteq B \cap C$ halmaz, amire $|S'| = n + 1$, és z az S' konvex burkának belsejében van. Ez azonban ellentmond annak, hogy z nincs C -ben. \square

3.7. tétel. *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz, és $z \notin C$. Ekkor létezik $w^T \in \mathbb{R}^n$ nemnulla vektor, amire $wx \leq wz$ tetszőleges $x \in C$ -re.*

Bizonyítás. Jelölje $\text{cl}(C)$ a C halmaz lezártját. Mivel $z \notin C$, a 3.6. lemma szerint z -nek minden környezetében van pont, ami nincs $\text{cl}(C)$ -ben. Így létezik $z^k \rightarrow z$ pontsorozat, amire $z^k \notin \text{cl}(C)$ semmilyen k -ra. A 3.4 tétel alapján léteznek w^k nemnulla sorvektorok, amikre $w^k x < w^k z^k$ tetszőleges $x \in C$ -re. Feltehetjük, hogy $\|w^k\| = 1$ minden k ra. Legyen w a w^k sorozat tetszőleges torlódási pontja; erre $\|w\| = 1$, tehát $w \neq 0$, és $wx \leq wz$ tetszőleges $x \in C$ -re. \square

3.8. megjegyzés. A 3.7. tételben az egyenlőtlenséget nem cserélhetjük le szigorú egyenlőtlenségre. Ha például $C = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0 \text{ vagy } (x_1 = 0 \text{ és } x_2 > 0)\}$, akkor $(0, 0) \notin C$, de nincs olyan w amire $wx < 0$ minden $x \in C$ -re.

3.9. tétel. *Legyenek $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ és $C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ diszjunkt konvex halmazok. Létezik $w^T \in \mathbb{R}^n$ nemnulla vektor, amire $wx \leq wy$ tetszőleges $x \in C_1$ -re és $y \in C_2$ -re.*

Bizonyítás. Legyen $C = C_1 - C_2$. Ez konvex halmaz, és $0 \notin C$, tehát a 3.7. tétel értelmében létezik $w^T \in \mathbb{R}^n$ nemnulla vektor, amire $wz \leq 0$ tetszőleges $z \in C$ -re. Így $wx - wy \leq 0$ tetszőleges $x \in C_1$ -re és $y \in C_2$ -re. \square

3.2. Konvex függvények

3.10. definíció (Konvex függvény). Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz. Az $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *konvex*, ha tetszőleges $x, y \in C$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Szemléletesen ezt úgy is mondhatjuk, hogy tetszőleges $x, y \in C$ esetén az $[x, y]$ szakaszon a függvény grafikonja a két végpontot összekötő szakasz alatt megy.

3.11. definíció. Az $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek $z \in C$ *lokális minimuma*, ha z -nek van olyan B nyílt környezete, amire $f(x) \geq f(z)$ minden $x \in B \cap C$ -re. A $z \in C$ pont f -nek *globális minimuma*, ha $f(x) \geq f(z)$ minden $x \in C$ -re.

3.12. tétel. Ha f konvex és z lokális minimuma f -nek, akkor globális minimuma is.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy z nem globális minimum, tehát van $x \in C$, amire $f(x) < f(z)$. Legyen B a z egy tetszőleges nyílt környezete. Ekkor létezik $0 < \lambda < 1$, hogy $\lambda x + (1 - \lambda)z \in B \cap C$. Viszont $f(\lambda x + (1 - \lambda)z) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(z) < f(z)$, tehát z nem lokális minimum. \square

A globális minimumok jellemzéséhez vezessük be a szubgradiens fogalmát.

3.13. definíció. A konvex $C \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett f függvénynek $z \in C$ pontban a $w \in \mathbb{R}^n$ vektor *szubgradiense*, ha $w^T(x - z) \leq f(x) - f(z)$ minden $x \in C$ -re. A szubgradiensek halmazát $\partial f(z)$ jelöli.

Figyeljük meg, hogy z pontosan akkor globális minimuma f -nek, ha $\mathbf{0} \in \partial f(z)$. A következőkben bebizonyítjuk, hogy C nyílt halmazon értelmezett konvex függvénynek mindenhol létezik szubgradiense. Ehhez szükségünk lesz a konvex függvények alábbi ekvivalens definíciójára.

3.14. lemma. Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz, és $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Vezessük be a $H(f) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t > f(x)\}$ jelölést. Az f függvény pontosan akkor konvex, ha $H(f)$ konvex halmaz.

Bizonyítás. Ha f nem konvex, akkor létezik $x, y \in C$ és $0 \leq \lambda \leq 1$, amire $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. Ekkor léteznek $t_1 > f(x)$ és $t_2 > f(y)$ számok, hogy $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2$. Mivel $(x, t_1) \in H(f)$ és $(y, t_2) \in H(f)$ de $(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \notin H(f)$, azt kapjuk hogy $H(f)$ nem konvex.

A fordított irányhoz legyen f konvex függvény, és legyen $(x, t_1) \in H(f)$ és $(y, t_2) \in H(f)$. Mivel $t_1 > f(x)$ és $t_2 > f(y)$, az f konvexitása miatt $\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2 > f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$, tehát $(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \in H(f)$. \square

3.15. tétel. Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt konvex halmaz, és $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény. Ekkor tetszőleges $z \in C$ -re $\partial f(z) \neq \emptyset$.

Bizonyítás. A 3.14. lemma szerint $H(f)$ konvex halmaz, és a definíciója szerint $(z, f(z)) \notin H(f)$. A 3.7. tétel szerint létezik $(w, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nemnulla vektor, amire $w^T x + \lambda t \leq w^T z + \lambda f(z)$ minden $(x, t) \in H(f)$ esetén. Mivel $t > f(z)$ esetén $(z, t) \in H(f)$, λ nem lehet pozitív. Ha $\lambda = 0$, akkor $w \neq \mathbf{0}$, és $w^T x \leq w^T z$ minden $x \in C$ -re; ez azonban ellentmond C nyíltságának. Így λ negatív, és átskálázással feltehetjük, hogy $\lambda = -1$. Tehát $w^T x - t \leq w^T z - f(z)$ minden $x \in C$ -re és $t > f(x)$ -re, így $t \rightarrow f(x)$ határátmenettel azt kapjuk, hogy $w^T(x - z) \leq f(x) - f(z)$ minden $x \in C$ -re, vagyis $w \in \partial f(z)$. \square

A szubgradiensek a gyakorlatban rendkívül fontos szerepet játszanak a konvex optimalizálási feladatok megoldásában, főleg abban az esetben, ha a minimalizálandó f függvény nem feltétlenül differenciálható. A legegyszerűbb használható algoritmus a következő *szubgradiens módszer*: kiindulunk egy tetszőleges $x^0 \in C$ pontból, és minden iterációban az aktuális pont egy szubgradiensével ellentétes irányba teszünk egyre csökkenő nagyságú lépéseket (és megállunk, ha $\mathbf{0}$ szubgradiens).

Formálisan, legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt konvex halmaz, és $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény. Legyen emellett τ_1, τ_2, \dots pozitív számoknak egy olyan monoton csökkenő végtelen sorozata, amire $\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i = \infty$, de $\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i^2 < \infty$. Legyen $x^0 \in C$ tetszőleges, és definiáljuk a következő pontsorozatot:

$$x^{k+1} = x^k - \min\{\tau_k, \lambda_k/2\} w^k,$$

ahol $w^k \in \partial f(x^k)$ egy tetszőleges nemnulla szubgradiens, és $\lambda_k = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : x^k - \lambda w^k \in C\}$. Az algoritmus megáll, ha $\mathbf{0} \in \partial f(x^k)$, azaz x^k optimális megoldás. Be lehet látni, hogy bizonyos technikai feltételek mellett a szubgradiens módszer konvergál egy olyan ponthoz, ami minimalizálja f -et.

A szubgradiens módszer érdekessége, hogy előfordulhat, hogy $f(x^{k+1}) > f(x^k)$, ugyanis a szubgradienssel ellentétes irányban nem feltétlenül csökken a függvényérték. A módszer hatékonysága inkább a következő tulajdonságnak köszönhető:

3.16. állítás. *Legyen $z \in C$ tetszőleges, és $w \in \partial f(z)$ egy tetszőleges nemnulla szubgradiens. Ekkor minden olyan $x \in C$ pont, amire $f(x) < f(z)$, az $\{x \in \mathbb{R}^n : w^T x < w^T z\}$ nyílt féltérben van.*

Bizonyítás. Ha x nincs a fenti nyílt féltérben, akkor $w^T x \geq w^T z$, tehát a szubgradiens definíciója szerint $f(x) \geq f(z) + w^T(x - z) = f(z) + w^T x - w^T z \geq f(z)$. \square

Az állítás alapján a szubgradiens módszer úgy működik, hogy mindig az optimális megoldást tartalmazó nyílt féltérbe lép be a féltér határáról, a határhipersíkra merőleges irányban.