

Kiegészítés a *Poliéderek Kombinatorika* jegyzethez

Király Tamás

2021. március

1. T -kötések, T -vágások

Legyen $G = (V, E)$ egy összefüggő irányítatlan gráf, és legyen $T \subseteq V$ egy páros elemszámú csúcshalmaz (a terminálok halmaza)

Definíció. Az $F \subseteq E$ élhalmaz T -kötés, ha $d_F(v)$ pontosan akkor páratlan ha $v \in T$. Egy $[U, V \setminus U]$ vágás T -vágás, ha $T \cap U$ páratlan.

1. Feladat. Mutassuk meg, hogy minden összefüggő gráfban van T -kötés. Mutassuk meg, hogy ha F T -kötés és $[U, V \setminus U]$ T -vágás, akkor $F \cap \delta(U)$ páratlan.

Minimális súlyú T -kötés keresésével itt nem foglalkozunk, ez a téma a Kombinatorikus Optimalizálási Struktúrák jegyzet első fejezetében szerepel. Minimális súlyú T -vágás a Gomory-Hu fa segítségével található, a következő tételnek köszönhetően.

Legyen $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf, $c \in \mathbb{R}_+^E$ élsúlyokkal. Legyen H a Gomory-Hu fa $\gamma \in \mathbb{R}_+^T$ élsúlyokkal, és $e \in H$ -ra jelölje U_e a $H - e$ egyik komponensét. A Gomory-Hu fa definíciója szerint tetszőleges $u, v \in V$ -re igaz, hogy ha $e \in H$ az egyik minimális γ -súlyú él az $u - v$ úton H -ban, akkor $[U_e, V \setminus U_e]$ minimális c -súlyú $u - v$ vágás, és $d_c(U) = \gamma_e$.

1. Tétel. Legyen T egy páros terminál-halmaz. Legyen $e \in H$ minimális súlyú olyan él, amire $U_e \cap T$ páratlan. Ekkor $[U_e, V \setminus U_e]$ minimális súlyú T -vágás G -ben.

Bizonyítás. Legyen $G' = (V, E \cup H)$, és definiáljunk a $c' : E \cup H \rightarrow \mathbb{R}_+$ súlyozást úgy, hogy E -n megegyezik c -vel, H -n pedig 0. Világos, hogy G -ben és G' -ben ugyanazok a halmazok határoznak meg T -vágást, és a súlyuk is ugyanaz. Legyen $[U, V \setminus U]$ egy minimális súlyú T -vágás.

Legyen $J \subseteq H$ azoknak az $f \in H$ éleknek a halmaza, amikre $[U_f, V \setminus U_f]$ T -vágás. Könnyű ellenőrizni, hogy J egy T -kötés G' -ben, azaz pontosan T pontjaiban páratlan a fokszáma. Mivel G' -ben egy T -kötésnek és egy T -vágásnak mindig páratlan sok közös éle van, létezik $e = uv \in \Delta(U) \cap J$. Ekkor egyrészt $[U_e, V \setminus U_e]$ T -vágás, másrészt $d_c(U_e) \leq d_c(U)$, hiszen a Gomory-Hu fa tulajdonságai miatt $[U_e, V \setminus U_e]$ minimális súlyú $u - v$ vágás, és $[U, V \setminus U]$ is egy $u - v$ vágás. Azt kaptuk tehát, hogy $[U_e, V \setminus U_e]$ minimális súlyú T -vágás. \square

A következőkben a T -kötések és T -vágások poliédereivel foglalkozunk. A kiindulásunk Seymour tétele a minimális méretű T -kötésről páros gráfban. Ennek bizonyítása szerepel a jegyzetben (2.2.6. Tétel), úgyhogy itt csak kimondom:

2. Tétel (Seymour, Jegyzet 2.2.6. Tétel). Egy G összefüggő páros gráfban egy T -kötés minimális elemszáma egyenlő az élidegen T -vágások maximális számával. \square

Legyen $\mathcal{P} = \{U \subseteq V : |U \cap T| \text{ páratlan}\}$. Legyen P a T -kötések poliédere, azaz a T -kötések karakterisztikus vektorainak konvex burka. Poliéderek szempontból kicsit könnyebb kezelni ennek felső burkát:

$$Q = P + \mathbb{R}_+^E = \{x \in \mathbb{R}^E : \exists y \in P, y \leq x\}.$$

3. Tétel. A következő rendszer $\frac{1}{2}$ -TDI, és a T -kötések felső burkát írja le:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, d_x(U) \geq 1 \forall U \in \mathcal{P}\}.$$

Bizonyítás. Minden T -kötés kielégíti a feltételeket, tehát a konvex burkuk is. A másik irányhoz belátjuk, hogy tetszőleges nemnegatív racionális c -re a $\min\{cx : x \in Q\}$ feladatnak van egész optimális megoldása. Ezt elég belátni olyan c -re, aminek minden komponense páros szám. A duális feladat:

$$\max \left\{ \sum_{U \in \mathcal{P}} y_U : y \geq 0, \sum_{U: e \in \delta(U)} y_U \leq c_e \forall e \in E \right\}.$$

Konstruáljunk G -ből egy G' gráfot úgy, hogy minden e élt egy c_e hosszú úttal helyettesítsünk. Seymour tételét alkalmazva erre a páros gráfra, van egy α szám, hogy G' -ben van α méretű T -kötés és α élidegen T -vágás. A T -kötésből kapunk egy α súlyú F T -kötést G -ben, a T -vágásokból pedig kapunk α darab T -vágást G -ben úgy, hogy az e él legfeljebb c_e darabban szerepel. Legyen y_U az U multiplicitása ezek közt a vágások közt; y így megengedett duális megoldás, α célfüggvény-értékkel. Ebből következik, hogy F karakterisztikus vektora optimális c -re a Q poliéderen.

A bizonyításból az is látszik, hogy páros c -re van egész optimális duális megoldás, tehát a rendszer $\frac{1}{2}$ -TDI. \square

Megjegyzés. Maga a T -kötés poliédernek is van kezelhető leírása, de a fenténél kicsit bonyolultabb feltételek is kellene.

Felvetődik a kérdés, hogy a T -vágások felső burka is hasonlóan egyszerűen leírható-e. Először is vegyük észre, hogy a T -kötésekkel ellentétben a T -vágások poliéderére nem várható kezelhető leírás, mert a maximális $s-t$ vágás feladat NP-nehéz. Ezért talán meglepő, hogy a felső burk leírását egyből megkaphatjuk a 3. Tételből. Ehhez azonban először meg kell ismerkednünk a blokkoló poliéderek elméletével.

2. Blokkoló poliéderek

Legyen a V alaphalmazon \mathcal{E} egy Sperner-rendszer, azaz egy olyan hipergráf, aminek nincs két egymást tartalmazó hiperéle.

Definíció. Az \mathcal{E} **blokkere** az a hipergráf, ami az $\{Y \subseteq V : |X \cap Y| \geq 1 \forall X \in \mathcal{E}\}$ tartalmazásra minimális elemeiből áll. Ezt a hipergráfot $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ -vel jelöljük.

2. Feladat. Mutassuk meg, hogy a tartalmazásra minimális T -kötések Sperner-rendszerének blokkere a tartalmazásra minimális T -vágások rendszere.

3. Feladat. Legyen az alaphalmazunk egy összefüggő irányítatlan gráf élhalmaza. Mi a tartalmazásra minimális (azaz elemi) vágások Sperner-rendszerének blokkere?

4. Feladat. Legyen az alaphalmazunk egy irányított gráf élhalmaza. Mi az r -gyökerű fenyők Sperner-rendszerének blokkere?

5. Feladat. Legyen az alaphalmazunk egy irányított gráf élhalmaza. Mi az $s-t$ utak Sperner-rendszerének blokkere?

Világos, hogy $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ is Sperner-rendszer. Vegyük észre, hogy az üres hipergrafnak a blokkere az egyetlen, üres hiperéleiből álló „hipergráf”, és fordítva. Általában igaz a következő:

4. Lemma. Tetszőleges \mathcal{E} Sperner-rendszerre $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$.

Bizonyítás. A blokker definíciója szerint minden $X \in \mathcal{E}$ -re és $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ -re teljesül hogy $|X \cap Y| \geq 1$. A másik irány bizonyításához legyen Z egy olyan halmaz, aminek nincs \mathcal{E} -beli részhalma (ő maga sem az). Ekkor $Y = V \setminus Z$ -re igaz, hogy $|X \cap Y| \geq 1$ minden $X \in \mathcal{E}$ -re. A blokker definíciója szerint tehát létezik $Y' \subseteq Y$, hogy $Y' \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, így $Z \notin \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{E}))$. \square

A \mathcal{E} Sperner-rendszerhez tartozó fedési poliéder

$$P_{cov}(\mathcal{E}) = \{x \in \mathbb{R}^V : x \geq 0, \tilde{x}(Z) \geq 1 \forall Z \in \mathcal{E}\}.$$

Világos, hogy $P_{cov}(\mathcal{E})$ bináris elemei közül azok csúcsok, amik $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ -beli halmazok karakterisztikus vektorai. $P_{cov}(\mathcal{E})$ pontosan akkor egész poliéder, ha nincs más csúcsa, azaz csúcsai pontosan a $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ -beli halmazok karakterisztikus vektorai. A következő tétel mutatja, hogy milyen szoros kapcsolat van \mathcal{E} és $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ fedési poliédere között.

5. Tétel. $P_{cov}(\mathcal{E})$ pontosan akkor egész poliéder, ha $P_{cov}(\mathcal{B}(\mathcal{E}))$ az.

Bizonyítás. Legyen $P_1 = P_{cov}(\mathcal{E})$ és $P_2 = P_{cov}(\mathcal{B}(\mathcal{E}))$. Mivel $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$, elég belátni, hogy ha P_2 nem egész poliéder, akkor P_1 sem az. Ha P_2 nem egész poliéder, akkor van olyan $c \in \mathbb{Q}_+^V$ és $z^* \in P_2$, hogy $cz^* < 1$, de $\tilde{c}(Z) \geq 1$ minden $Z \in \mathcal{E}$ -re. Az utóbbi azt jelenti, hogy $c^T \in P_1$. Tekintsük P_1 -en a $c' = (z^*)^T$ célfüggvényt. Mivel $z^* \in P_2$, $c'y \geq 1$ minden egész pontjára P_1 -nek, de $c'c^T < 1$, így P_1 nem egész poliéder. \square

6. Következmény. Legyen G összefüggő gráf, T páros terminálhalmaz, és jelölje \mathcal{F} a tartalmazásra minimális T -kötések Sperner-rendszerét. A következő rendszer a T -vágások felső burkát írja le:

$$\{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, \tilde{x}(F) \geq 1 \forall F \in \mathcal{F}\}.$$

Bizonyítás. A 3. Tétel értelmében a T -vágások fedési poliédere egész. Mivel a T -vágások rendszerének blokkere a T -kötések rendszere, az 5. Tétel szerint a T -kötések fedési poliédere is egész, azaz csúcsai a T -vágások karakterisztikus vektorai. Ezért a T -kötések fedési poliédere megegyezik a T -vágások felső burkával. \square

Megjegyzés. Az \mathcal{E} Sperner-rendszert **ideálisnak** nevezzük, ha $P_{cov}(\mathcal{E})$ egész poliéder. Az 5. Tétel azt mondja ki, hogy \mathcal{E} pontosan akkor ideális ha $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ az. Ezen túl érdekes kérdés az is, hogy a $\min\{cx : x \in \mathbb{R}^V, x \geq 0, \tilde{x}(Z) \geq 1 \forall Z \in \mathcal{E}\}$ rendszer mikor TDI; az ilyen hipergráfokat **Max-Flow-Min-Cut tulajdonságúnak** nevezzük. Itt már nem igaz, hogy ha egy hipergráf ilyen, akkor a blokkere is (feladat: konstruáljuk példát). A terület egyik legrégebbi nyitott kérdése a Replikációs Sejtés: igaz-e, hogy ha minden $\{0, 1, \infty\}$ -értékű célfüggvényre van primál és duál egész optimális megoldás, akkor a hipergráf Max-Flow-Min-Cut tulajdonságú?

6. Feladat. A korábbi feladatokban szereplő rendszerek közül melyek ideálisak?

3. Antiblokkoló poliéderek

Ahogy az előző fejezetben, legyen a V alaphalmazon \mathcal{E} egy Sperner-rendszer.

Definíció. Az \mathcal{E} **antiblokkere** az a hipergráf, ami az $\{Y \subseteq V : |X \cap Y| \leq 1 \forall X \in \mathcal{E}\}$ tartalmazásra maximális elemeiből áll. Ezt a hipergráfot $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ -vel jelöljük.

7. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy gráfban a tartalmazásra maximális klikkek Sperner-rendszerének blokkere a tartalmazásra maximális stabil csúcshalmazok rendszere.

Világos, hogy $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ is Sperner-rendszer. A blokkerek esetével szemben azonban itt nem igaz, hogy $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$. Példaként tekintsünk egy háromszöget, azaz $\mathcal{E} = \{\{u, v\}, \{v, w\}, \{w, u\}\}$. Ekkor $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \{\{u\}, \{v\}, \{w\}\}$, és így $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{E})) = \{\{u, v, w\}\}$.

Definíció. Az \mathcal{E} Sperner-rendszer **konform**, ha tetszőleges legalább kételemű $U \subseteq V$ -re igaz a következő tulajdonság: ha $\{u, v\}$ része \mathcal{E} -beli halmaznak minden $u, v \in U$ -ra, akkor U is része \mathcal{E} -beli halmaznak.

Az \mathcal{E} Sperner-rendszer **perfekt**, ha a

$$P_{\text{pack}}(\mathcal{E}) = \{x \in \mathbb{R}^V : x \geq 0, \tilde{x}(Z) \leq 1 \forall Z \in \mathcal{E}\}$$

pakolási poliéder egész.

A definícióból következik, hogy minden \mathcal{E} konform Sperner-rendszerhez létezik egy olyan $G(\mathcal{E})$ gráf V csúcshalmazzal, aminek a tartamlazásra maximális klikkjei pont \mathcal{E} elemei: $G(\mathcal{E})$ élei legyenek azok a párok, amik részei \mathcal{E} -beli halmaznak. A konformitás miatt minden klikk része \mathcal{E} -beli halmaznak; másrészt ha U nem klikk, akkor nem lehet \mathcal{E} -beli, hiszen van U -beli pontpár ami nem része \mathcal{E} -beli halmaznak.

Be fogjuk látni, hogy a perfekt Sperner-rendszerek pontosan azok, amikre $G(\mathcal{E})$ perfekt gráf. Ehhez több fontos tételen át vezet az út.

7. Lemma. *Ha \mathcal{E} perfekt, akkor konform.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy \mathcal{E} nem konform, és vegyünk egy tartalmazásra minimális U halmazt, ami megsérti a konformitás feltételét. Ekkor nyilván $|U| \geq 3$, és minden $u \in U$ -ra $U - u$ része \mathcal{E} -belinek, de U maga nem. Legyen $x = \frac{1}{|U|-1}\chi^U$. Ekkor $x \in P_{\text{pack}}(\mathcal{E})$, és $\tilde{x}(U) > 1$, de $\tilde{z}(U) \leq 1$ minden $z \in P_{\text{pack}}(\mathcal{E}) \cap \mathbb{Z}^V$ -re, ami bizonyítja, hogy $P_{\text{pack}}(\mathcal{E})$ nem egész poliéder. \square

Konform esetben már hasonlóak igazak, mint blokkereknél (sőt, még több is, mint látni fogjuk).

8. Lemma. *Tetszőleges konform \mathcal{E} Sperner-rendszerre $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ is konform, és $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$.*

Bizonyítás. Mint láttuk, \mathcal{E} megfelel a $G(\mathcal{E})$ gráf tartalmazásra maximális klikkjeinek, így $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ a $G(\mathcal{E})$ tartalmazásra maximális stabil halmazából áll, ami konform. Ennek antiblokkere megint a maximális klikkek halmaza. \square

9. Tétel. *Ha $P_{\text{pack}}(\mathcal{E})$ egész poliéder, akkor $P_{\text{pack}}(\mathcal{A}(\mathcal{E}))$ is az.*

Bizonyítás. Nyilván elég azt az esetet nézni, amikor \mathcal{E} konform. Legyen $P_1 = P_{\text{pack}}(\mathcal{E})$ és $P_2 = P_{\text{pack}}(\mathcal{A}(\mathcal{E}))$. Ha P_2 nem egész poliéder, akkor van olyan $c \in \mathbb{Q}_+^V$ és $z^* \in P_2$, hogy $cz^* > 1$, de $\tilde{c}(Z) \leq 1$ minden $Z \in \mathcal{E}$ -re. Az utóbbi azt jelenti, hogy $c^T \in P_1$. Tekintsük P_1 -en a $c' = (z^*)^T$ célfüggvényt. Mivel $z^* \in P_2$, $c'y \leq 1$ minden egész pontjára P_1 -nek, de $c'c^T > 1$, így P_1 nem egész poliéder. \square

Az előző fejezet végén említettük a fedési poliéderekre vonatkozó Replikációs Sejtést. Ennek pakolási poliéderekre vonatkozó megfelelője az úgynevezett Replikációs Lemma, amit Lovász László bizonyított. Az alábbiakban belátjuk ezt a lemmát, és segítségével a Gyenge Perfekt Gráf Tételt is. Tekintsük a következő primál-duál párt.

$$\max\{cx : x \in \mathbb{R}^V, x \geq 0, \tilde{x}(Z) \leq 1 \forall Z \in \mathcal{E}\}, \quad (\text{LP})$$

$$\min \left\{ \sum_{Z \in \mathcal{E}} y_Z : y \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}}, y \geq 0, \sum_{Z \in \mathcal{E}: v \in Z} y_Z \geq c_v \forall v \in V \right\}. \quad (\text{D})$$

10. Tétel (Replikációs Lemma). *Ha egy \mathcal{E} konform hipergráfra tetszőleges $c \in \{0, 1\}^V$ esetén (LP)-nek és (D)-nek is van egész optimális megoldása, akkor az (LP) rendszer TDI.*

Bizonyítás. $\|c\|_1$ szerinti indukcióval belátjuk, hogy tetszőleges $c \in \mathbb{Z}_+^V$ esetén (LP)-nek és (D)-nek van egész optimális megoldása; $c \in \{0, 1\}^V$ esetén ezt tudjuk, tehát feltehetjük hogy van $u \in V$ amire $c_u \geq 2$. Jelölje OPT_c az (LP) optimum-értékét.

Legyen $c'_u = c_u - 1$, és $c'_v = c_v$ ha $v \neq u$. Jelölje $(LP)'$ és $(D)'$ a c' -re vonatkozó feladatokat. Az indukciós feltevés szerint c' -re vannak egész optimális megoldások; $(LP)'$ -nek az optimális megoldásai tehát $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ azon hiperélei, melyek súlya $\text{OPT}_{c'}$. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: Létezik $X \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$, amire $c'(X) = \text{OPT}_{c'}$ és $u \in X$. Ekkor $\text{OPT}_c \geq \text{OPT}_{c'} + 1$. Legyen y' egy egész optimális megoldása $(D)'$ -nek, és legyen $Z' \in \mathcal{E}$ tetszőleges amire $u \in Z'$. Ekkor a következő y optimális megoldása (D) -nek: $y_{Z'} = y'_{Z'} + 1$, $y_Z = y'_Z$ különben. A fenti X pedig optimális (LP) -re, hiszen súlya megegyezik a duál optimummal.

2. eset: $X \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$, $c'(X) = \text{OPT}_{c'}$ esetén $u \notin X$. Legyen y' egy egész optimális megoldása $(D)'$ -nek, és válasszunk egy $Z' \in \mathcal{E}$ -t, amire $u \in Z'$ és $y'_{Z'} > 0$ (ilyen van, mert $c'_u > 0$). Legyen $c''_v = c'_v - 1$ ha $v \in Z' - u$ és $c'_v > 0$, és $c''_v = c'_v$ különben. Ha $X \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ és $c'(X) = \text{OPT}_{c'}$, akkor egyrészt $|X \cap Z'| = 1$ az optimalitási feltételek miatt, másrészt $u \notin X$ a 2. eset feltevése miatt, harmadrészt $c'_v = 0$ esetén $v \notin X \cap Z'$ a v -re vonatkozó optimalitási feltétel miatt. Így azt kapjuk, hogy $\text{OPT}_{c''} = \text{OPT}_{c'} - 1 \leq \text{OPT}_c - 1$. Legyen y'' egy egész optimális megoldása $(D)''$ -nek. Ekkor a következő y optimális megoldása (D) -nek: $y_{Z'} = y''_{Z'} + 1$, $y_Z = y''_Z$ különben. Az $(LP)'$ tetszőleges optimális egész megoldása pedig optimális (LP) -re, hiszen súlya megegyezik a duál optimummal. \square

A Replikációs Lemma segítségével belátjuk a perfekt gráfok poliéderes jellemzését. Egy G gráfra legyen

$$P(G) = \{x \in \mathbb{R}^V : x \geq 0, x(S) \leq 1 \text{ minden } S \text{ stabil csúcshalmazra}\}.$$

Emlékeztetőül, egy gráf *perfekt*, ha tetszőleges feszített részgráfban a maximális klikkméret és a kromatikus szám megegyezik, azaz

$$\omega(G[U]) = \chi(G[U]) \quad \forall U \subseteq V.$$

11. Tétel (Fulkerson, Chvátal). *Egy G gráf pontosan akkor perfekt, ha $P(G)$ egész poliéder.*

Bizonyítás. Legyen G perfekt gráf, \mathcal{E} a tartalmazásra maximális stabil halmazok hipergráfja, és $c \in \{0, 1\}^V$. Legyen $U = \{v \in V : c_v = 1\}$. Az $\omega(G[U]) = \chi(G[U])$ tulajdonság pont azt jelenti, hogy c -re (LP) -nek és (D) -nek is van egész optimális megoldása. A Replikációs Lemma szerint tehát (LP) TDI, így $P_{\text{pack}}(\mathcal{E}) = P(G)$ egész poliéder.

A másik irányhoz indirekt tegyük fel, hogy G nem perfekt de $P(G)$ egész, és legyen U egy tartalmazásra minimális csúcshalmaz, amire $\omega(G[U]) < \chi(G[U])$. Legyen c az U karakterisztikus vektora. Mivel $P(G)$ egész poliéder, a dualitás tétel miatt van y duális megoldás amire $\sum y_S = \omega(G[U])$. Ha $y_S > 0$, akkor az optimalitási feltételek miatt $|S \cap U| = 1$ minden K maximális méretű klikkre $G[U]$ -ban. Válasszunk egy tetszőleges ilyen S -et; ekkor

$$\omega(G[U \setminus S]) \leq \omega(G[U]) - 1 < \chi(G[U]) - 1 \leq \chi(G[U \setminus S]),$$

ellentmondva U minimális választásának. \square

12. Következmény (Gyenge Perfekt Gráf Tétel). *Egy G gráf pontosan akkor perfekt, ha komplementere perfekt*

13. Következmény. *Egy \mathcal{E} Sperner-rendszerre a következők ekvivalensek:*

- (i) \mathcal{E} perfekt
- (ii) \mathcal{E} konform és $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ perfekt
- (iii) \mathcal{E} konform és $G(\mathcal{E})$ perfekt gráf
- (iv) Az (LP) rendszer TDI

Bizonyítás. A korábbi tételek egyszerű következményei:

- (i) \Rightarrow (ii): 9. Tétel

- (ii) \Rightarrow (iii): 7. Lemma, 8. Lemma, 11. Tétel
- (iii) \Rightarrow (iv): Replikációs Lemma
- (iv) \Rightarrow (i): A rendszer TDI-sága és a jobboldal egészsége miatt $P_{pack}(\mathcal{E})$ egész poliéder.

□

4. Színes Carathéodory tétel

Bárány Imre bizonyította be a Carathéodory tétel következő általánosítását.

14. Tétel (Színes Carathéodory Tétel). *Legyenek $X_1 \subseteq \mathbb{R}^n, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n, \dots, X_{n+1} \subseteq \mathbb{R}^n$ olyanok, hogy $0 \in \text{conv}(X_i)$ minden i -re. Ekkor létezik $v_1 \in X_1, \dots, v_{n+1} \in X_{n+1}$, hogy $0 \in \text{conv}(\{v_1, \dots, v_{n+1}\})$.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy az X_1, \dots, X_{n+1} halmazok végesek. Legyen $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i$. Egy $Y = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq X$ halmazt **tarkának** nevezünk, ha léteznek különböző i_1, \dots, i_k indexek, hogy $v_j \in X_{i_j}$ minden j -re. Legyen T egy olyan legfeljebb n elemű tarka halmaz, amire $\text{conv}(T)$ legközelebb van az origóhoz. Ha $0 \in \text{conv}(T)$, akkor kész vagyunk; ellenkező esetben legyen α a $\text{conv}(T)$ távolsága a 0-tól, és H a $\text{conv}(T)$ -t és a $B(0, \alpha)$ gömböt gyengén elválasztó hipersík.

Legyen i olyan index, ami nem szerepel az i_j -k között. Mivel $0 \in \text{conv}(X_i)$, létezik $v \in X_i$ a H -nak a 0 felőli nyílt féltérében. Ha $0 \in \text{conv}(T + v)$, akkor kész vagyunk, hiszen $T + v$ tarka, tehát feltehetjük, hogy nem ez a helyzet. Legyen w a $\text{conv}(T + v)$ 0-hoz legközelebbi pontja. Mivel $\text{conv}(T + v)$ metszi a $B(0, \alpha)$ gömb belsejét, w közelebb van 0-hoz mint T . Másrészt w rajta van $\text{conv}(T + v)$ egy legfeljebb n dimenziós oldalán, tehát létezik $u \in T$, hogy $\text{conv}(T - u + v)$ közelebb van 0-hoz mint T , ami ellentmondás. □

Egy kicsit erősebb tétel is bizonyítható egyszerű topologikus módszerekkel:

15. Tétel. *Legyenek $X_1 \subseteq \mathbb{R}^n, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n, \dots, X_{n+1} \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan nemüres halmazok, hogy $0 \in \text{conv}(X_i \cup X_j)$ minden $i \neq j$ -re. Ekkor létezik $v_1 \in X_1, \dots, v_{n+1} \in X_{n+1}$, hogy $0 \in \text{conv}(\{v_1, \dots, v_n\})$.*

Bizonyítás. A bizonyítás eleje azonos az előző tétellel; itt is legyen α a $\text{conv}(T)$ távolsága a 0-tól, és H a $\text{conv}(T)$ -t és a $B(0, \alpha)$ gömböt gyengén elválasztó hipersík. Legyen H^- a H -nak a 0 felőli nyílt féltére.

Ha az i index nem szerepel az i_j -k között, és létezik $v \in X_i \cap H^-$, akkor ugyanúgy kész vagyunk mint az előző bizonyításban. Ellenkező esetben van $n+1-k$ index amire $X_i \cap H^- = \emptyset$. A feltevésünk szerint ez csak $k = n$ esetén lehetséges, ráadásul $\text{conv}(T)$ ($n-1$)-dimenziós szimplex, jelölje S .

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel hogy $T = \{v_1, \dots, v_n\}$ ahol $v_j \in X_j$ ($j \in [n]$). A feltevésünk szerint $X_j \cap H^- \neq \emptyset$ ($j \in [n]$); legyen $v'_j \in X_j \cap H^-$ ($j \in [n]$). Legyen w az S 0-hoz legközelebbi pontja, azaz $w = S \cap B(0, \alpha)$; ekkor $w \in \text{int}(S)$.

Legyen $z \in X_{n+1}$; az eddigiekből tudjuk, hogy $z \notin H^-$. Legyen L_1 a w irányú félegyenes 0-ból, és L_2 a $-z$ irányú félegyenes 0-ból. Figyeljük meg, hogy L_1 w -ben metszi H -t, míg L_2 nem metszi. Legyen $L = L_1 \cup L_2$.

Tekintsük az n -dimenziós β_n kereszt-politópot, aminek csúcsai e_j ($j \in [n]$) és $-e_j$ ($j \in [n]$), és jelölje $\partial\beta_n$ a határát. Létezik egy f folytonos leképezés $\partial\beta_n$ -ről egy Q szimpliciális komplexusra úgy, hogy $f(e_i) = v_i$, $f(-e_i) = v'_i$ ($j \in [n]$), és f lineáris β_n minden lapjára megszorítva. Következésképp Q minden szimplexe tarka, és a linearitás miatt $\text{int}(S)$ pontjai csak az S szimplexben szerepelnek.

Legyen $Q' = Q \setminus \text{int}(S)$. Ez egy $(n-1)$ -dimenziós gömbbel homeomorf szimpliciális komplexus, aminek határa ugyanaz mint S határa. Mivel $L \cap S = \{w\}$, ∂S egy nem-összehúzható kör az $\mathbb{R}^n \setminus L$ topologikus térben.

Mivel $\partial Q' = \partial S$, Q' nem lehet diszjunkt L -től, hiszen Q' -ben $\partial Q'$ összehúzható. Legyen $w' \in L \cap Q'$, és legyen T' a w' -t tartalmazó Q' -beli tarka szimplex csúcshalmaza.

Ha $w' \in L_1$, akkor w' közelebb van 0-hoz mint w , ellentmondásban T választásával. Ha $w' \in L_2$, akkor $T' \cup \{z\}$ tarka, és $0 \in \text{conv}(T' \cup \{z\})$. □